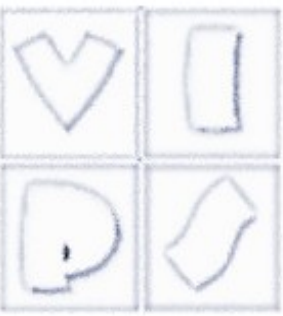


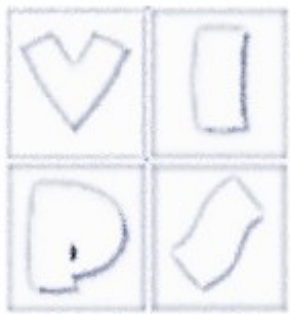
Grafica al calcolatore - Computer Graphics

4 – Geometria dello spazio e modellazione



Modellare lo spazio

- Richiamiamo le nozioni basilari di geometria per modellare lo spazio e gli oggetti
 - Scalari: unidimensionali, possono rappresentare grandezze fisiche con numeri
 - Punti rappresentano una posizione nello spazio
 - Vettori: rappresentano le direzioni o le distanze tra punti in 2D o 3D
- Per definire una posizione nello spazio dobbiamo introdurre un sistema di riferimento con un punto fisso detto origine e una terna di direzioni ortogonali



Scalari

- Gli scalari S costituiscono un corpo (tipicamente useremo \mathbb{R}) con due operazioni, somma e moltiplicazione, che soddisfano le seguenti relazioni

$$\forall \alpha \beta \gamma \in S$$

Commutatività

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

Associatività

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

Distribuzione

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Elementi neutri

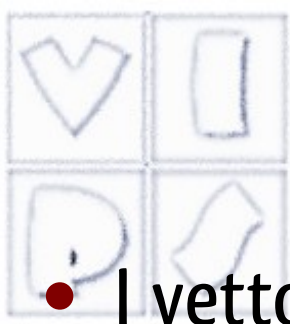
$$\exists 0 \in S : \forall \alpha \in S \alpha + 0 = \alpha$$

$$\exists 1 \in S : \forall \alpha \in S \alpha 1 = \alpha$$

Elementi inversi

$$\forall \alpha \in S \exists (-\alpha) \in S : \alpha + (-\alpha) = 0$$

$$\forall \alpha \in S \exists \alpha^{-1} \in S : \alpha \alpha^{-1} = 1$$



Vettori

- I vettori costituiscono un gruppo abeliano (commutativo) V in cui è definito il **prodotto di un vettore per uno scalare**
- Qui indicati con caratteri minuscoli in grassetto (spesso indicati con frecce)
- La definizione è totalmente astratta, ma per semplicità conviene considerare due utili esempi di spazi vettoriali lineari:
 - Geometrico
 - Algebrico



Chiusura

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

$$\alpha \mathbf{v} \in V \quad \forall \alpha \in S, \mathbf{v} \in V$$

Proprietà algebriche

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

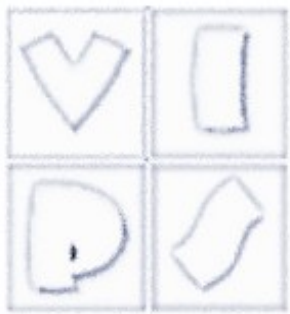
$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$$

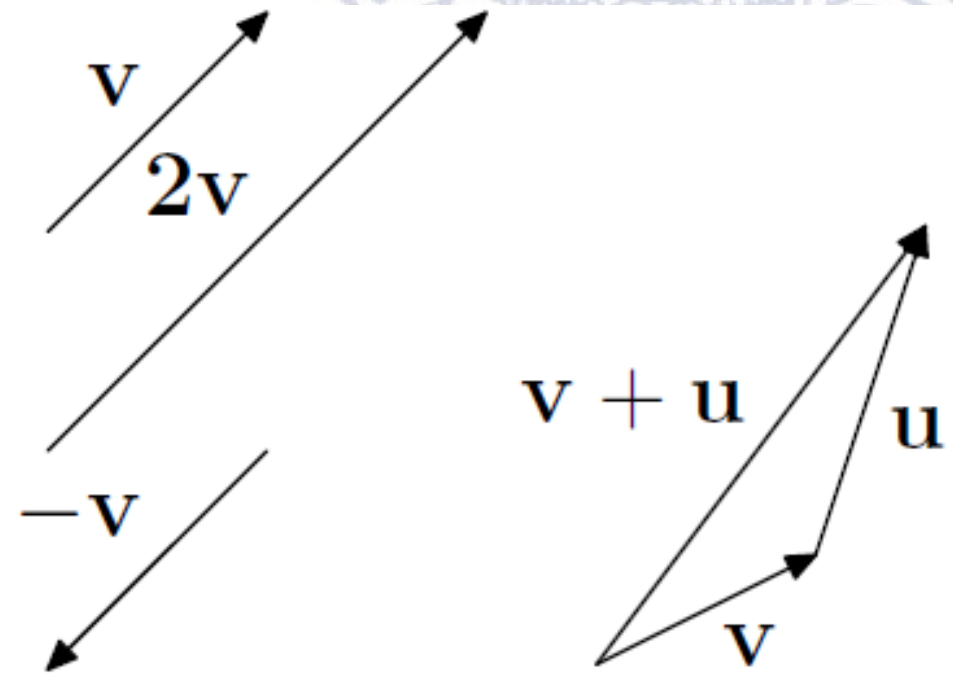
$$\exists \mathbf{0} \in V : \forall \mathbf{u} \in V \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

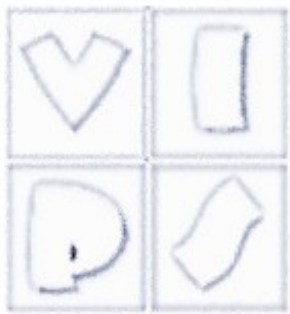
$$\forall \mathbf{u} \in V \exists (-\mathbf{u}) \in V : \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$



Vettori

- Un esempio concreto è dato dai segmenti orientati liberi, ovvero senza un punto di applicazione specificato
- Il prodotto con uno scalare (numeri reali) cambia la lunghezza del vettore
- La somma di due vettori è data dalla regola del parallelogramma





Vettori

- Un altro esempio è dato dall'insieme delle n-ple ordinate di \mathbb{R}^n

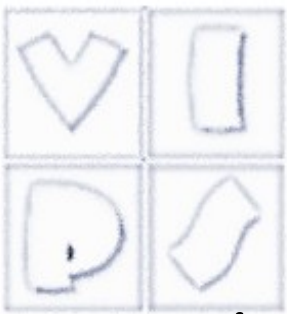
$$\mathbf{v} = (\beta_1, \dots, \beta_n) \quad \beta_i \in \mathbb{R} \forall i$$

- Il prodotto per uno scalare e la somma di due vettori sono definiti in modo del tutto naturale

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

$$\alpha(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha\beta_1, \dots, \alpha\beta_n)$$

- E' facile vedere qual è l'elemento neutro e qual è l'inverso di un vettore



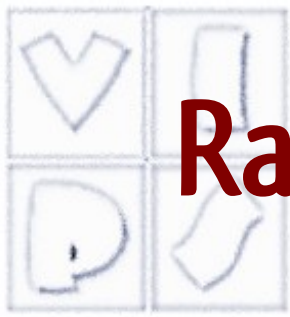
Indipendenza lineare

- Dati n vettori non nulli, si dicono linearmente indipendenti se qualsiasi loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli è diversa dal vettore nullo

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \forall i$$

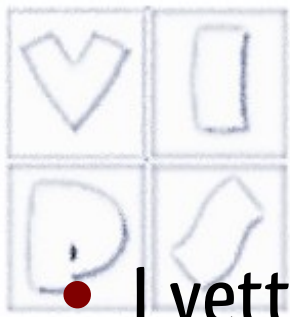
- Si dice dimensione di uno spazio vettoriale il massimo numero di vettori linearmente indipendenti
- In uno spazio vettoriale a dimensione n , un insieme di n vettori linearmente indipendenti si dice una base per lo spazio
- Ogni vettore può essere scritto come combinazione lineare dei vettori di una base

$$\forall \mathbf{v} \in V \exists (\alpha_1 \dots \alpha_n) : \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$



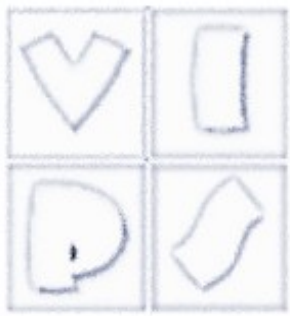
Rappresentazione in componenti

- Fissata quindi una **base in uno spazio vettoriale**, ad ogni vettore corrisponde una n-pla di scalari, ovvero i coefficienti dello sviluppo lineare del vettore nei vettori di base; tali scalari sono le componenti del vettore rispetto alla base data.
- In genere il corpo è dato dai reali; abbiamo quindi ottenuto la rappresentazione concreta vista prima di uno spazio vettoriale astratto come insieme di n-ple di \mathbb{R}^n
- Tale rappresentazione dipende dalla base scelta



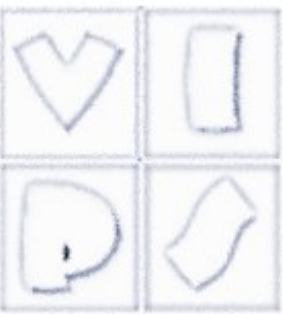
Punti

- I vettori non rappresentano punti nello spazio, ma solo spostamenti. Per poter introdurre il concetto di posizione si deve passare agli spazi affini che sono degli spazi vettoriali a cui si aggiunge il concetto astratto di punto.
- I punti sono definiti in senso astratto come nuovi elementi con cui è possibile effettuare solo una operazione: la sottrazione tra punti
- La differenza di due punti è un vettore: $P - Q = \mathbf{v}$
- Dato un punto Q ed un vettore \mathbf{v} , esiste un unico punto P tale che $P - Q = \mathbf{v}$
- Si definisce quindi una somma tra un punto ed un vettore il cui risultato è un punto: $P = Q + \mathbf{v}$



Punti

- Attenzione: non ho sommato Q da entrambe le parti dell'equazione precedente
- L'interpretazione geometrica è immediata; i punti sono locazioni nello spazio e la differenza di due punti è data dal vettore che li congiunge; e importante non confondere punti e vettori, sono entità geometriche ben distinte.



Combinazioni affini

- Non è definita una somma tra punti e neppure un prodotto di uno scalare per un punto; in generale sono operazioni non lecite, ma c'è una eccezione
- Si prendano tre punti P , Q ed O e si consideri il seguente punto
$$P' = \alpha(P - O) + \beta(Q - O) + O$$
- P' non dipende da O , ma solo dai punti P e Q , se e solo se
$$\alpha + \beta = 1$$
- In questo caso P' è la combinazione affine di P e Q , e si scrive, a volte in modo improprio, come somma pesata dei punti
- La combinazione affine di due punti distinti descrive la retta passante per i due punti.

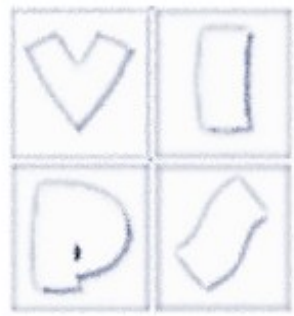


Combinazioni affini

- La combinazione affine si estende in modo naturale a n punti

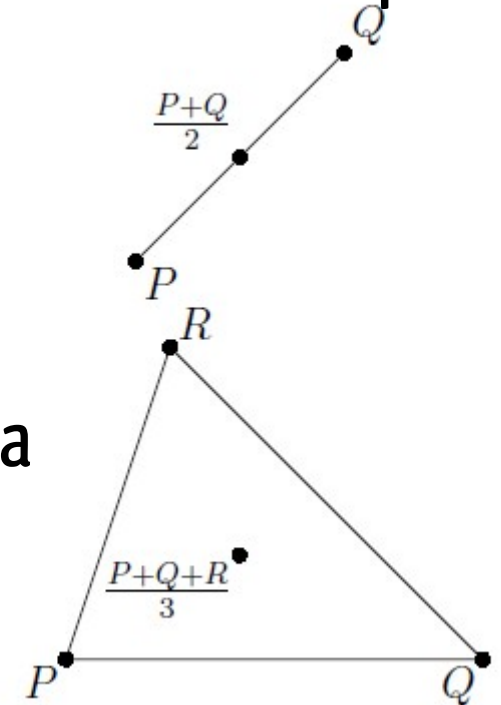
$$P' = \sum_i \alpha_i P_i, \quad \sum_i \alpha_i = 1 \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

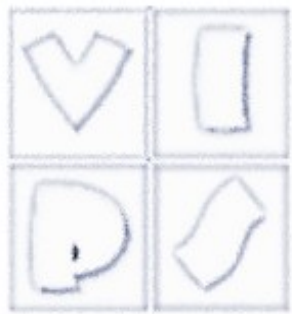
- Un insieme di punti si dice affinementemente indipendente se nessun punto è combinazione affine degli altri.



Combinazione convessa

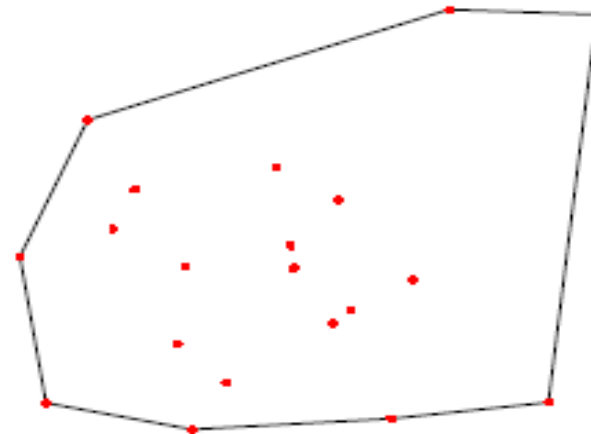
- La combinazione convessa è una combinazione affine con pesi positivi.
- Nel caso della combinazione convessa di due punti, il punto risultante giace sul segmento che congiunge i due punti. Se i pesi sono entrambi pari a 0.5, il punto risultante si trova a metà tra i due.
- Nel caso di n punti che formano un poligono convesso, il punto risultante si trova all'interno del poligono. Se tutti i pesi sono uguali a $1/n$, il punto risultante si chiama centroide dell'insieme dei punti.

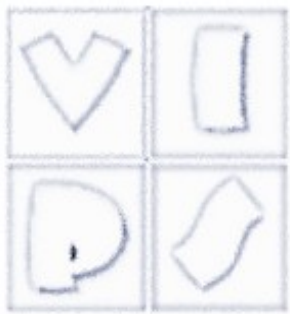




Guscio convesso

- Un insieme C in \mathbb{R}^n è convesso se per ogni coppia di punti P_1 , P_2 appartenenti a C si ha che $P' = \alpha(P_1 - P_2) + P_2$ appartiene a C per ogni α in $[0, 1]$ ovvero tutti i punti sul segmento che unisce P_1 con P_2 appartengono all'insieme C
- Il guscio convesso (convex hull) di un insieme di punti è la più piccola regione convessa che contiene tutti i punti dati.





Prodotto interno

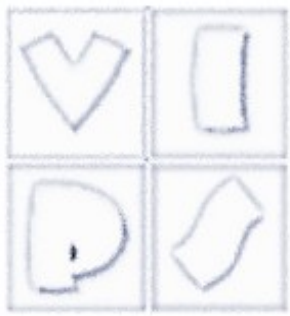
- In uno spazio affine non è ancora definito il concetto di distanza o di angolo tra vettori; questi li si ottiene passando ad uno spazio euclideo che è uno spazio affine provvisto di
- un prodotto interno tra vettori che soddisfa le seguenti relazioni

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \in S$$

$$(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \beta \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0 \quad (\mathbf{v} \neq \mathbf{0})$$

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0$$

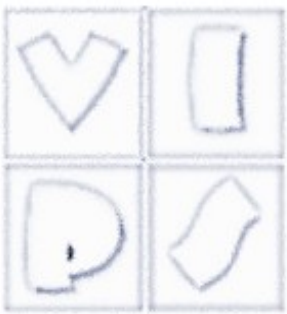


Lunghezze

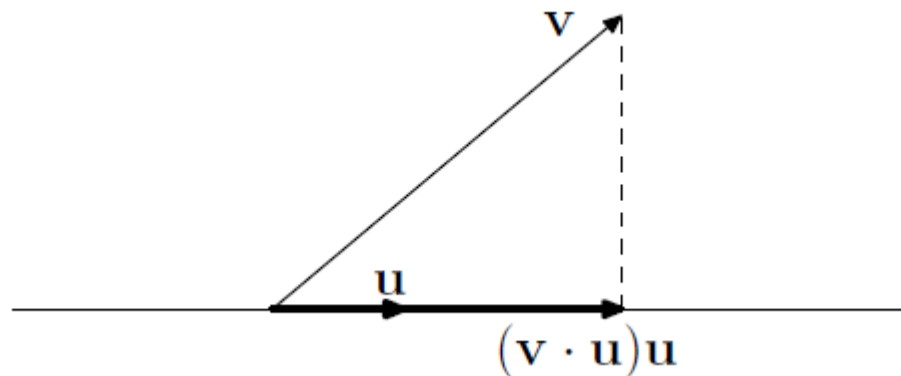
- Se il prodotto interno di due vettori è nullo, diremo che i due vettori sono ortogonali.
- Grazie al prodotto interno è possibile definire la lunghezza di un vettore (e quindi la distanza tra due punti) e l'angolo tra due vettori

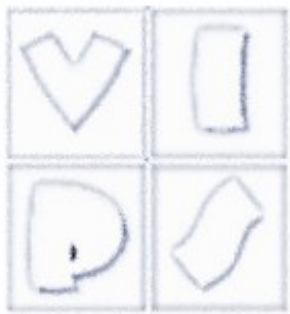
$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} \quad \cos \theta = \frac{v \cdot u}{\|v\| \|u\|}$$

Proiezione sulla retta



- Il prodotto scalare può essere usato, ad esempio, per trovare la proiezione di un vettore lungo una retta
- Sia dato il vettore \mathbf{v} e la retta con direzione identificata dal vettore di lunghezza unitaria \mathbf{u} ; il vettore ottenuto proiettando \mathbf{v} lungo la retta sarà della forma $\mathbf{v}' = t\mathbf{u}$ dove t è un parametro
- si può dimostrare che $t = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$





Normalizzazione

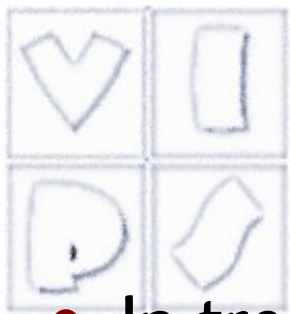
- Un vettore è normalizzato se la sua lunghezza è 1; dato un vettore qualsiasi lo si può normalizzare moltiplicandolo per il reciproco della sua lunghezza.
 - Un vettore normalizzato si dice anche versore
- Una base è ortonormale se è formata da versori a due a due ortogonali

$$(e_1 \dots e_n) : \|e_i\| = 1 \forall i \quad e \quad e_i \cdot e_j = 0 \forall i \neq j$$

- Data una base ortonormale il prodotto interno tra due vettori si esprime come somma dei prodotti delle componenti (usuale prodotto scalare di vettori)

$$v \cdot w = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$$

- data una base qualsiasi è sempre possibile derivare da essa una base ortonormale (procedimento di Gram-Schmidt)



Terne

- In tre dimensioni una base ortonormale si dice destrorsa, se la rotazione attorno ad e_3 che porta e_1 a coincidere con e_2 è antioraria se vista dalla parte positiva di e_3 .
- Se tale rotazione è oraria allora la base è sinistrorsa
- Si può usare la prima regola della mano destra: se si pone il pollice nella direzione di e_3 , la rotazione che porta e_1 in e_2 deve seguire il modo naturale con cui si piegano le altre dita.
- Oppure la seconda regola della mano destra per determinare la destrorsità: se si riesce a porre i tre vettori di base in corrispondenza con pollice, indice e medio della mano destra, tenuti perpendicolari l'uno all'altro, la base è destrorsa.
- La scelta di un orientamento è del tutto arbitraria, basta essere coerenti. Di norma si usano basi destrorse



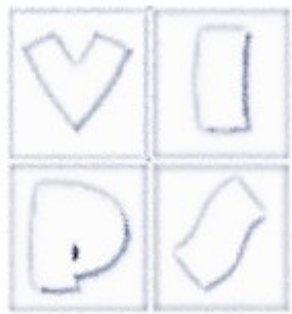
Sistemi di riferimento (frame)

- Il concetto di base si estende a quello di riferimento in uno spazio affine (o euclideo) specificando, oltre alla base, anche un punto O detto origine del riferimento.
- Poiché ogni vettore è sviluppabile in una base data ed ogni punto esprimibile come somma di un punto dato e di un vettore, dato un riferimento $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, O)$, i punti ed i vettori dello spazio saranno esprimibili nel seguente modo:

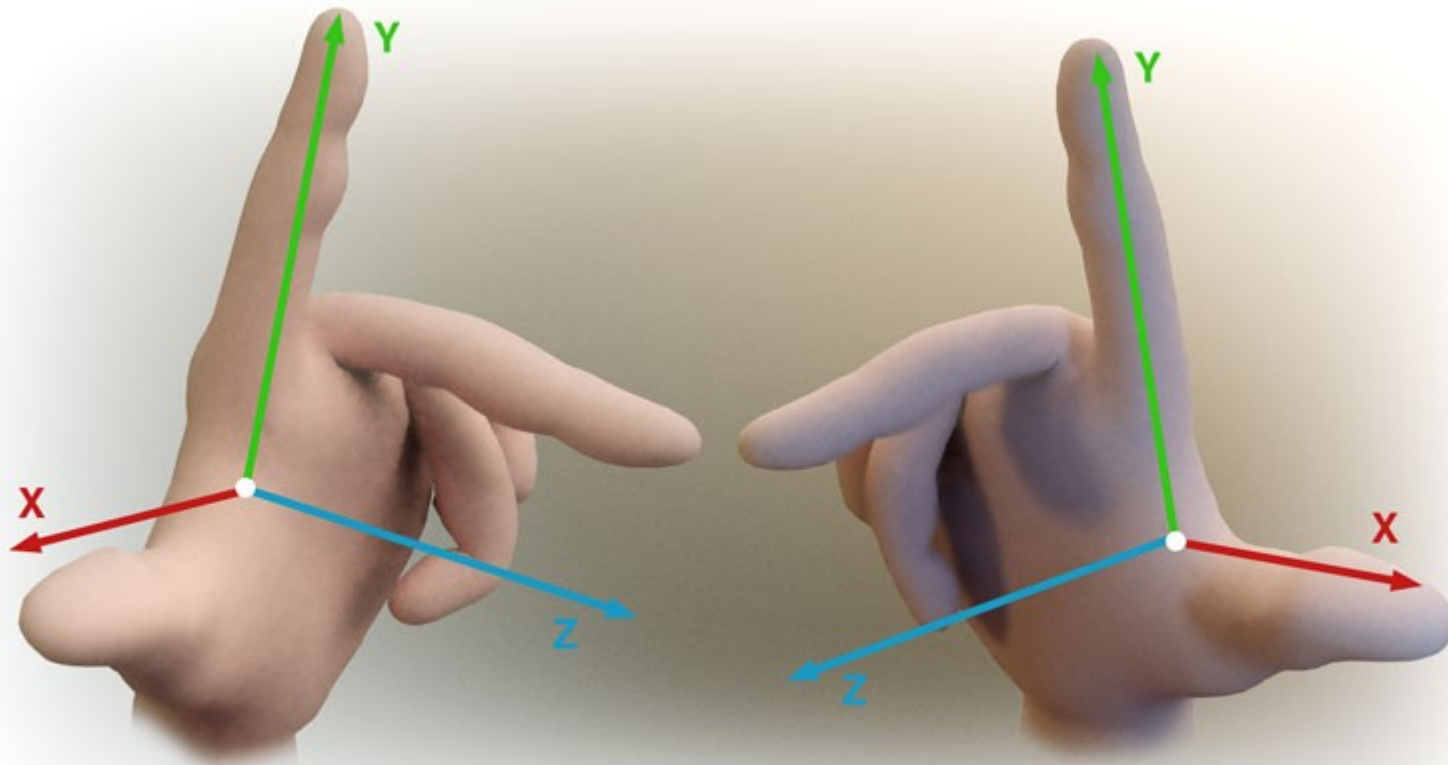
$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$$

$$P = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3 + O$$

- Un riferimento **cartesiano** è dato da un riferimento la cui base di vettori sia ortonormale
- Un riferimento è **destrorso** se lo è la sua base.

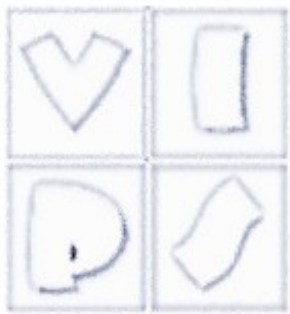


Frame handedness



Left Handed Coordinates

Right Handed Coordinates



Coordinate omogenee

- Definiamo il prodotto di un punto per 1 e per 0

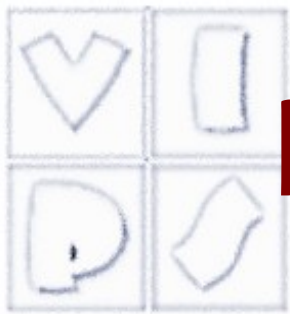
$$P \cdot 1 = P \quad P \cdot 0 = 0$$

- In questo modo possiamo definire le coordinate omogenee di un punto e di un vettore rispetto al riferimento $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{O})$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, 0)$$

$$P = (p_1, p_2, p_3, 1)$$

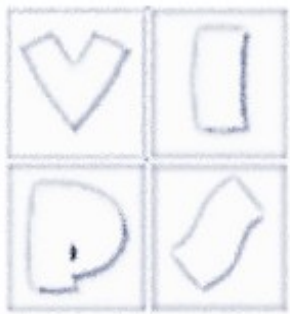
- La scelta di 0 e 1 come ultima coordinata per vettori e punti è arbitraria, andrebbe bene qualsiasi valore
 - Tale scelta però permette il **type checking**: si trattano le 4-ple delle coordinate omogenee come vettori quando si effettua una qualsiasi combinazione lineare di punti e vettori, usando le usuali regole, se l'ultima coordinata del risultato è 0, allora il risultato è un vettore; se è pari a 1 allora il risultato è un punto!
 - Se non è 0 né 1, allora si è effettuata una operazione non lecita



Riepilogo: spazio euclideo 3D

- Gli scalari sono numeri reali
- I vettori identificano direzioni nello spazio
- I punti determinano posizioni nello spazio
- Operazioni ammesse:
 - somma e prodotto tra scalari, prodotto di scalari per vettori, somma di vettori, differenza di punti, somma di un punto con un un vettore, combinazioni affini.
- Il prodotto scalare permette di determinare la lunghezza dei vettori, la distanza tra punti e l'angolo tra due vettori
- Conviene lavorare in una base ortonormale; in questo caso il prodotto scalare tra due vettori è particolarmente semplice
- I tre assi che formano la base si chiamano assi coordinati e si indicano con x , y e z (a volte useremo anche 1, 2 e 3).

R

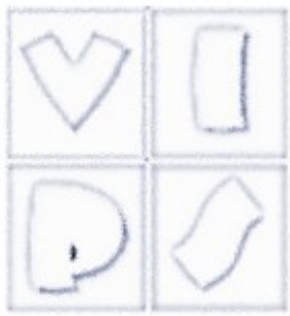


Prodotto vettore

- Nel caso particolare delle tre dimensioni è utile introdurre un'ulteriore operazione tra vettori: **il prodotto vettore**
- Si tratta di un caso particolare di prodotto denominato **esterno**; in tre dimensioni particolarmente semplice:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x)$$

- Si dimostra che il prodotto vettore di due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} è un vettore ortogonale al piano contenente i due vettori e di modulo pari all'area definita da \mathbf{u} e \mathbf{v} . Il verso è scelto in modo tale che $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ formino una terna destrorsa
 - Attenzione: il prodotto vettore (a differenza delle proprietà affini dello spazio) dipende dalla scelta del tipo di base, destrorsa o sin.



Esempio

- Data una direzione espressa dal vettore unitario \mathbf{v} , voglio creare un sistema di riferimento ortogonale con l'asse z coincidente con \mathbf{v} . Come faccio?
 - Prendo un qualunque vettore \mathbf{a} non parallelo a \mathbf{v}
 - Prendo la direzione dell'asse x \mathbf{e}_1 uguale a $\mathbf{v} \times \mathbf{a}$
 - Prendo la direzione dell'asse y \mathbf{e}_2 uguale a $\mathbf{v} \times \mathbf{e}_1$



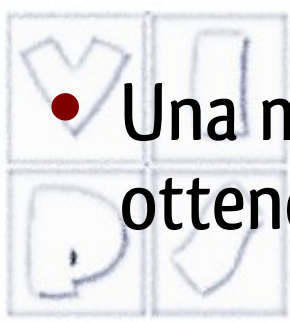
Matrici e trasformazioni



- Una matrice è essenzialmente un array bidimensionale di elementi; per i nostri scopi gli elementi saranno sempre degli scalari, tipicamente numeri reali.
- Una matrice A con M righe ed N colonne si scrive nel seguente modo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix}$$

- Una matrice in cui $N = M$ si dice quadrata
- Il caso limite in cui $M = 1$ coincide con la rappresentazione algebrica di un vettore (o con la N -pla delle sue componenti)



- Una matrice A può essere moltiplicata per uno scalare β ottenendo una matrice $C = \beta A$ definita nel seguente modo:

$$c_{ij} = \beta a_{ij} \quad \forall i, j$$

- Due matrici A e B si possono sommare se e solo se hanno lo stesso numero di righe e di colonne; in tal caso si ha $C = A + B$ data da

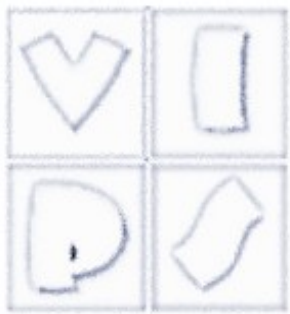
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$$

- Il prodotto tra matrici è definito solo quando il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda. Se A è una matrice $N \times M$ e B è una matrice $M \times K$, allora si ha $C = AB$ (di dimensioni $N \times K$) data da:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^M a_{il} b_{lj}$$

Il prodotto tra matrici è associativo ($(AB)C = A(BC)$), ma non commutativo (in generale $AB \neq BA$)

Matrice trasposta

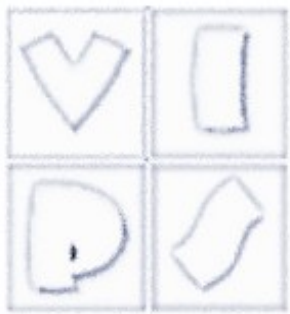


- indicata con il simbolo A^T , è la matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne di A

$$a_{ij}^T = a_{ji}$$

- Quindi se A è $N \times M$, allora la sua trasposta è $M \times N$.
- Per i vettori trasporre equivale a trasformare un vettore riga in un vettore colonna e viceversa
- D'ora in poi quando parleremo di trasformazione di un vettore \mathbf{v} con una matrice A intenderemo sempre l'usuale prodotto di matrici tra A e il trasposto di \mathbf{v} inteso come matrice con una sola colonna, es.

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix}$$



Determinante

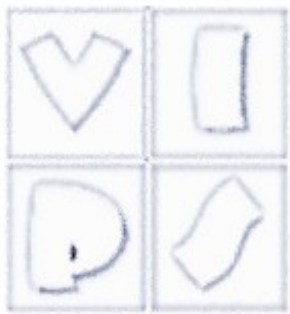
- Importante parametro per le matrici quadrate, indicato con il simbolo $\det A$ o con il simbolo $|A|$. Si definisce ricorsivamente:
- il determinante di una matrice 2x2 è definito da:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- il determinante di una matrice NxN è dato dalla formula

$$\det A = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+k} a_{jk} \det A_{jk}$$

- dove k è una colonna qualsiasi di A e dove il simbolo A_{jk} indica la matrice $(N-1) \times (N-1)$ ottenuta da A eliminando la riga j e la colonna k . Si può dimostrare che $\det(AB) = \det A \det B$



Identità

La matrice identità di ordine N è definita come una matrice quadrata $N \times N$ con tutti gli elementi fuori diagonale nulli e gli elementi sulla diagonale pari a 1

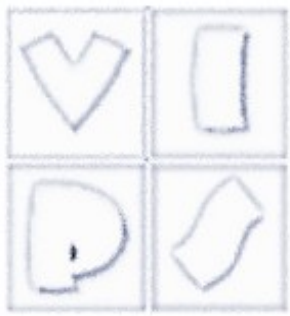
Data una matrice quadrata A questa si dice invertibile se esiste una matrice, indicata con A^{-1} tale che

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

In tal caso A^{-1} si chiama inversa di A

Si può dimostrare che una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da 0; in tal caso si ha

$$a_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}$$



Matrici come trasformazioni

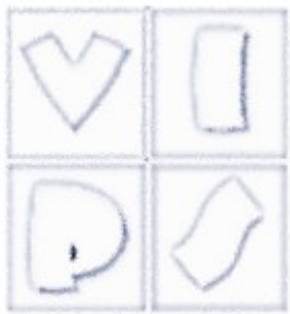
Abbiamo visto cosa significa applicare una matrice ad un vettore

- Le matrici quadrate rappresentano quindi delle applicazioni lineari di uno spazio vettoriale in sé (formano un gruppo non abeliano)
- Tutte le applicazioni lineari di uno spazio vettoriale in sé sono esprimibili tramite matrici quadrate
- L'applicazione di più di una matrice ad un vettore si effettua sfruttando l'algebra delle matrici; ad esempio applicare prima A , poi B ed infine C equivale ad applicare la matrice CBA



Matrici come cambiamento di base

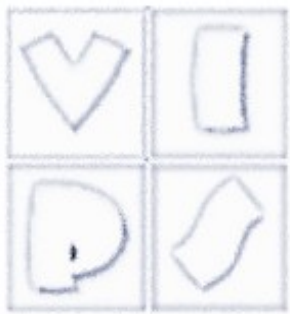
- Abbiamo detto che dato uno spazio vettoriale esistono infinite basi. Nella rappresentazione concreta il cambiamento da una base ad un'altra è descritto da una matrice
- In generale dato un vettore (v_1, v_2, v_3) , la sua trasformazione in (v'_1, v'_2, v'_3) tramite la matrice M può essere vista o come una trasformazione identificata da M del vettore fissata la base, oppure come un cambiamento di base indotto dalla matrice M^{-1} tenendo fisso il vettore
- Nel primo caso si parla di **trasformazione attiva** sullo spazio, nel secondo caso di **trasformazione passiva**



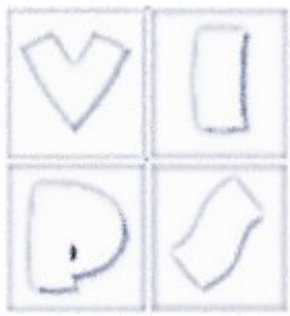
Cambio di riferimento

- L'idea si ripropone negli stessi termini per i sistemi di riferimento
- Dati due riferimenti (e_1, e_2, e_3, O) e (e'_1, e'_2, e'_3, O) si tratta di trovare una matrice 4×4 che permetta di ottenere le coordinate di un punto rispetto al secondo riferimento date le coordinate dello stesso punto rispetto al primo
- Come nel caso dei cambiamenti di base di un riferimento, se T è la trasformazione attiva che manda il primo riferimento nel secondo (e che manda le coordinate rispetto al secondo nelle coordinate rispetto al primo), allora T^{-1} è la matrice che trasforma le coordinate rispetto al primo riferimento nelle coordinate rispetto al secondo riferimento

Esercizio/esempio



- Qual è la rotazione che porta gli assi canonici $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ in una qualunque terna $e'_1=(e'_{11}, e'_{12}, e'_{13})$, $e'_2=(e'_{21}, e'_{22}, e'_{23})$, $e'_3=(e'_{31}, e'_{32}, e'_{33})$
- La matrice di rotazione è data da
$$\begin{pmatrix} e_1 e'_1 & e_1 e'_2 & e_1 e'_3 \\ e_2 e'_1 & e_2 e'_2 & e_2 e'_3 \\ e_3 e'_1 & e_3 e'_2 & e_3 e'_3 \end{pmatrix}$$
- Quindi
$$\begin{pmatrix} e'_{11} & e'_{21} & e'_{31} \\ e'_{12} & e'_{22} & e'_{32} \\ e'_{13} & e'_{23} & e'_{33} \end{pmatrix}$$
- Verificare

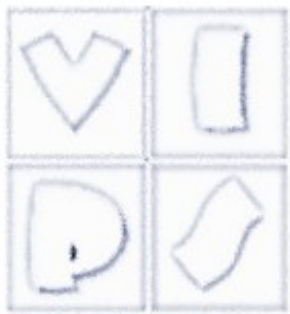


Quindi

- La trasformazione che porta il sistema di riferimento canonico $(O, \mathbf{e}_1=(1,0,0), \mathbf{e}_2=(0,1,0), \mathbf{e}_3=(0,0,1))$ in un sistema arbitrario $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ sarà

$$\begin{pmatrix} e'_{11} & e'_{21} & e'_{31} & O'_1 \\ e'_{21} & e'_{22} & e'_{23} & O'_2 \\ e'_{31} & e'_{32} & e'_{33} & O'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Allo stesso modo questa matrice trasforma le coordinate nel sistema di riferimento $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ in quelle nel sistema $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e con rotazione e traslazione inversa calcolo le coordinate rispetto al nuovo sistema date quelle in $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,$



Traslazione



- Una traslazione determinata dal vettore \mathbf{t} trasforma il punto P nel punto

$$P' = P + \mathbf{t}$$

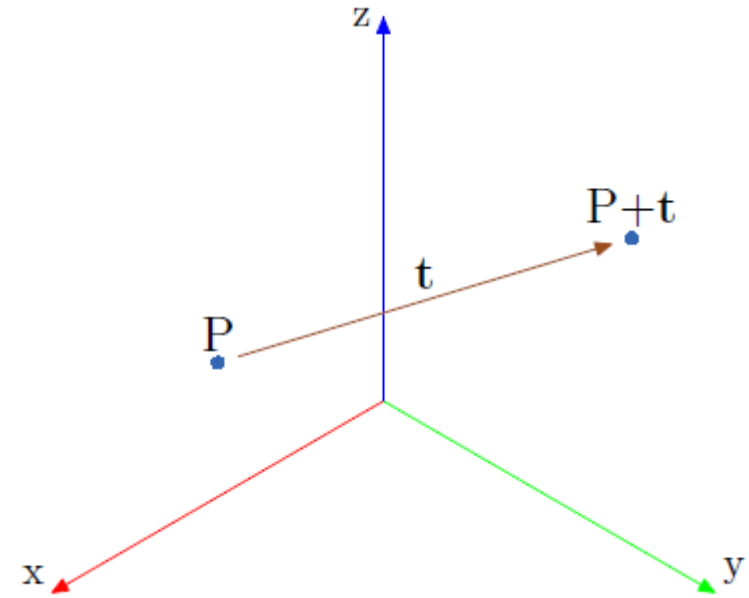
In termini di componenti

$$\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z, 0)$$

$$P = (p_x, p_y, p_z, 1)$$

$$P' = (p_x + t_x, p_y + t_y, p_z + t_z, 1)$$

- E' facile vedere che la matrice di trasformazione $T_{\mathbf{t}}$ per le coordinate omogenee è quella qui a destra



$$T_{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

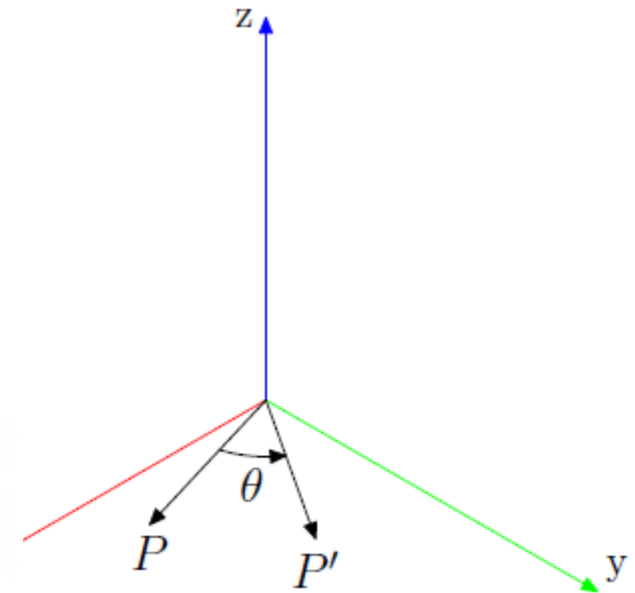
Rotazione rispetto a un asse

- Una rotazione di un angolo θ in senso antiorario (prima regola della mano destra) intorno all'asse z determina la seguente trasformazione di un punto P in P'

$$p'_x = p_x \cos(\theta) - p_y \sin(\theta)$$

$$p'_y = p_x \sin(\theta) + p_y \cos(\theta)$$

$$p'_z = p_z$$



- Si può facilmente dimostrare che per rotazioni intorno all'asse x e y si hanno le seguenti espressioni:

$$p'_y = p_y \cos(\theta) - p_z \sin(\theta)$$

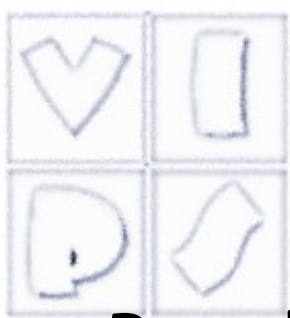
$$p'_z = p_y \sin(\theta) + p_z \cos(\theta)$$

$$p'_x = p_x$$

$$p'_z = p_z \cos(\theta) - p_x \sin(\theta)$$

$$p'_x = p_z \sin(\theta) + p_x \cos(\theta)$$

$$p'_y = p_y$$



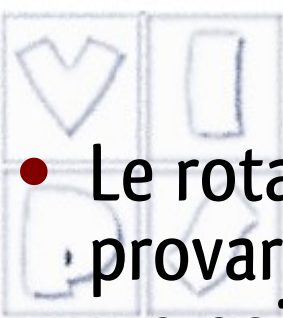
Rotazioni

- Dovrebbe a questo punto essere facile dimostrare che le matrici che rappresentano le rotazioni rispetto agli assi coordinati sono quelle qui riportate
- Da notare che un vettore viene trasformato da una rotazione (a differenza delle traslazioni che lasciano i vettori inalterati)
- Le matrici non commutano

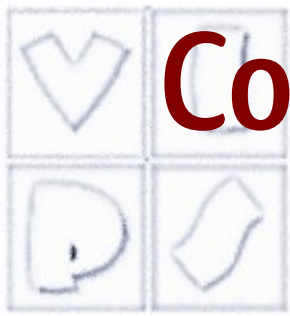
$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- Le rotazioni rispetto agli assi cartesiani non commutano; provare a ruotare un oggetto di 90 gradi prima rispetto all'asse x e poi rispetto all'asse y. Ripetete quindi l'operazione prima rispetto all'asse y e poi rispetto all'asse x. Risultato?i
- Da notare che le rotazioni lasciano inalterati i punti che si trovano sull'asse di rotazione.
- Si può dimostrare che $R_x(\theta)^{-1} = R_x(-\theta)$ e similmente per gli altri assi
- Si può dimostrare che le matrici di rotazione date sopra sono ortogonali, cioè ad es per asse x: $R_x(\theta)^{-1} = R_x(-\theta)^T$
- La proprietà di ortogonalità è vera per ogni rotazione, non solo per quelle rispetto agli assi coordinati
- Tutte le rotazioni sono esprimibili con matrici.

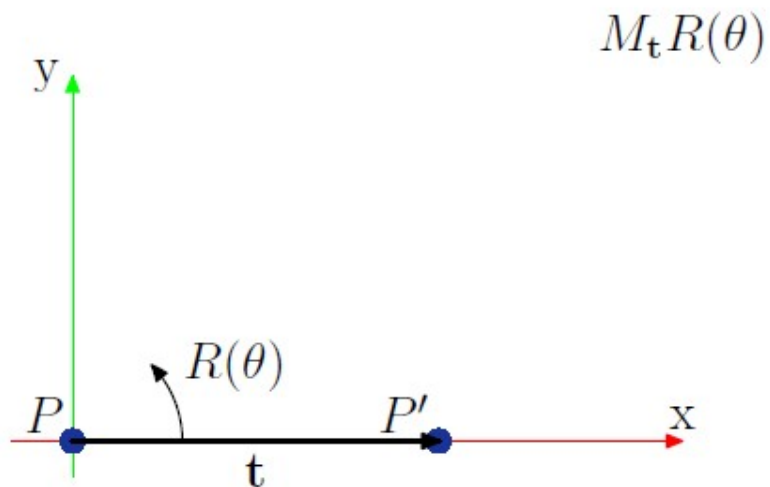
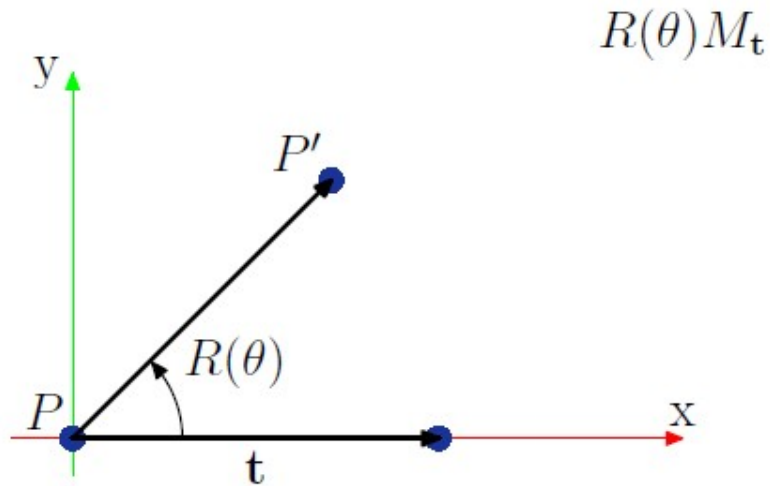


Composizione di trasformazioni e matrici

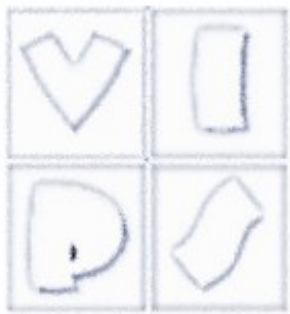
- Le trasformazioni espresse come matrici si compongono usando semplicemente l'algebra delle matrici
- Date due trasformazioni rappresentate dalle matrici A e B, la composizione di A seguita da B sarà data dalla matrice BA.
 - Importante: notare l'ordine delle matrici; siccome si applica la matrice risultante a sinistra del vettore delle coordinate omogenee, la trasformazione che viene effettuata per prima va a destra.
- La composizione di trasformazione si estende immediatamente al caso di più di due matrici $T = T_n \dots T_1$



Non commutatività



- Esempio: data una traslazione lungo il vettore t ed una rotazione di un angolo lungo l'asse z , si ottiene un risultato diverso effettuando prima la rotazione e poi la traslazione o viceversa
- Per rendersene conto basta guardare come viene trasformato nei due casi un punto che in partenza si trova nell'origine



Scalatura

- Traslazioni e rotazioni conservano la lunghezza dei vettori.
 - sottogruppo delle trasformazioni affini chiamato trasformazioni isometriche o rigide.
- Un altro tipo di trasformazione affine che non preserva le distanze è la **scalatura** (ve ne sono anche altre)
- Dato un punto $P = (p_x, p_y, p_z, 1)$ la trasformazione di scala, o scalatura, lo trasforma nel punto $P' = (s_x p_x, s_y p_y, s_z p_z, 1)$ dove i valori (s_x, s_y, s_z) sono i fattori di scala lungo gli assi
- Una scalatura è omogenea se $s_x = s_y = s_z = s$
 - vettori semplicemente allungati ($s > 1$) o accorciati ($s < 1$)
 - Un punto, in una scalatura omogenea, viene invece traslato lungo la retta che passa per l'origine e per il punto stesso

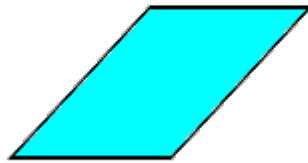


Trasformazioni affini

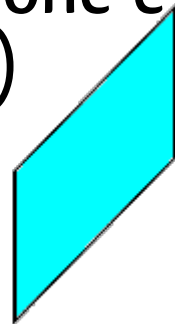
- Una generica matrice che lavora in coordinate omogenee rappresenta una trasformazione affine (12 gradi di libertà non solo traslazione rotazione e scala, ma anche shear)



Unit cube



Sheared in X direction



Sheared in Y direction

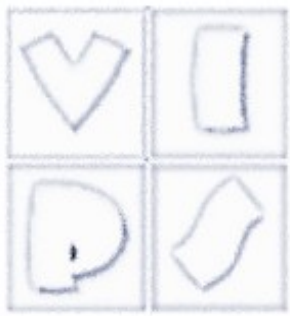
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c & u \\ d & e & f & v \\ g & h & i & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

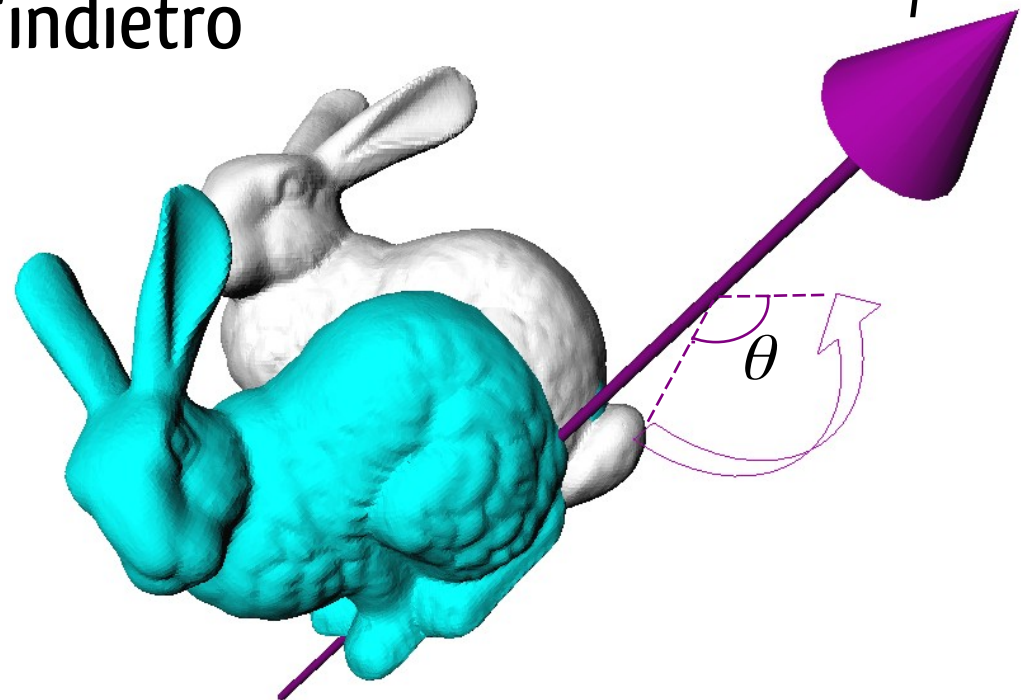
- Se t è il vettore di traslazione e R una matrice di rotazione, la trasformazione in coordinate omogenee è

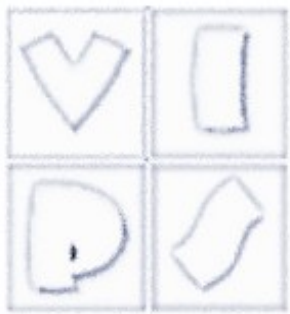
$$\begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotazioni generiche



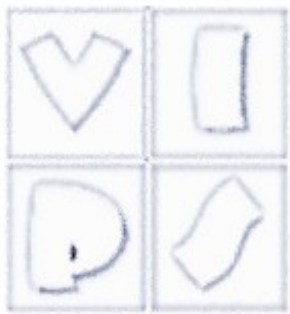
- Cerchiamo di approfondire la rappresentazione delle rotazioni e perché si usano rappresentazioni diverse
- Dobbiamo considerare rotazioni attorno a qualunque asse
- Comunque, non c'è nessuna perdita di generalità nel definirle solo attorno agli assi passanti per l'origine, dato che le altre le posso ricavare traslando l'origine sull'asse, ruotando e ritraslando l'origine all'indietro





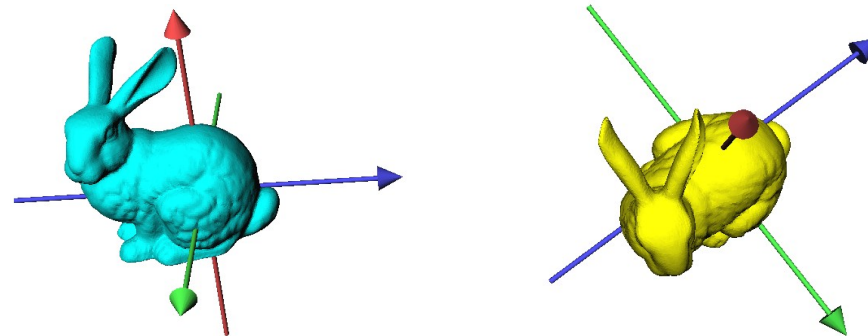
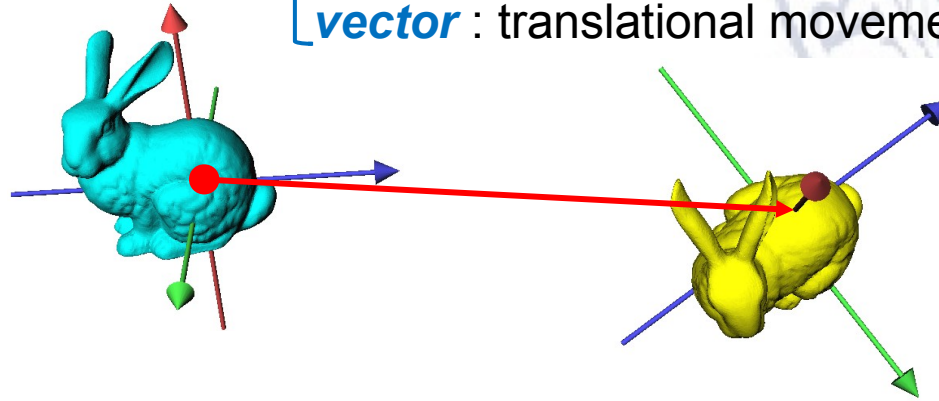
Rotazione e orientazione

- La rotazione rappresenta un cambio di orientazione
- L'orientazione rappresenta la posa di un oggetto nello spazio
- La relazione che c'è tra rotazione (movimento) e orientazione (stato) è analoga a quella tra punto e vettore
- Anche per le operazioni
 - orientazione+rotazione=orientazione
 - rotazione+rotazione=rotazione

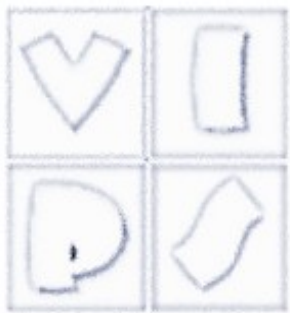


Analogia

[*point* : the 3d location of the bunny
[*vector* : translational movement

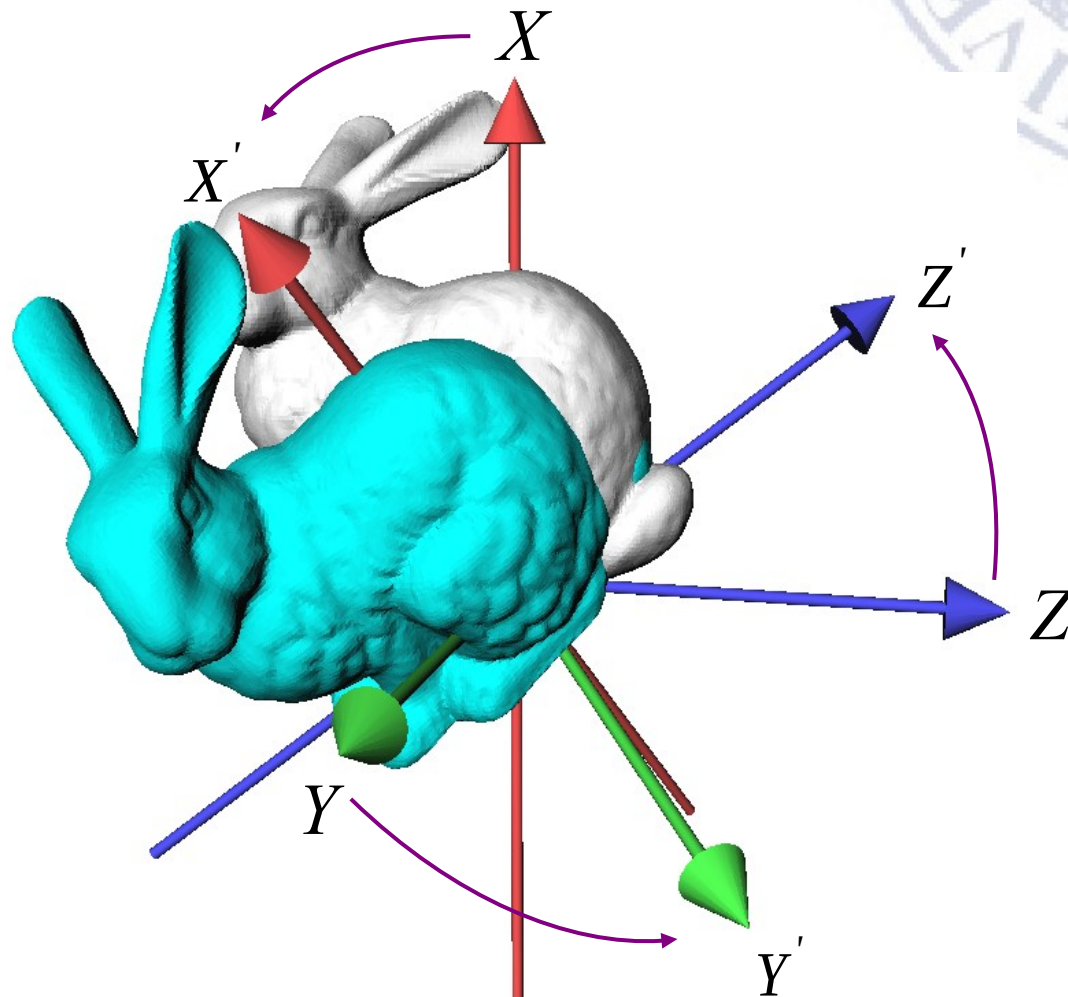


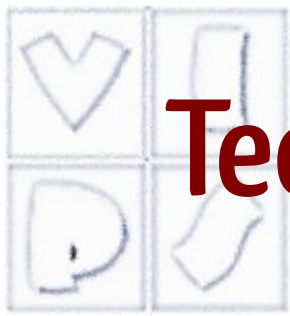
[*orientation* : the 3d orientation of the bunny
[*rotation* : circular movement



Rotazione 3D

- Due orientazioni generiche





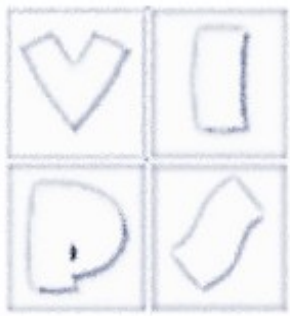
Teorema della rotazione di Eulero

The general displacement of a rigid body with one point fixed is a rotation about some axis

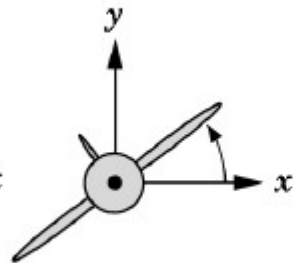
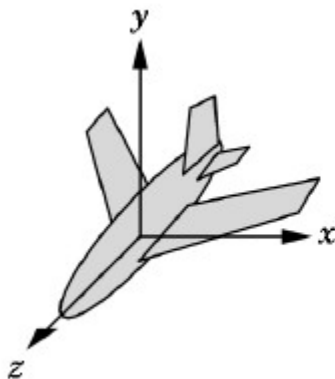
Leonhard Euler (1707-1783)

- Qualsiasi rotazione si può esprimere come rotazione di un angolo rispetto a un asse
- Qualsiasi rotazione lascia invariato un vettore invariato (l'asse)

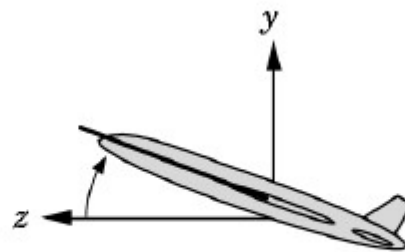
Rotazioni generiche



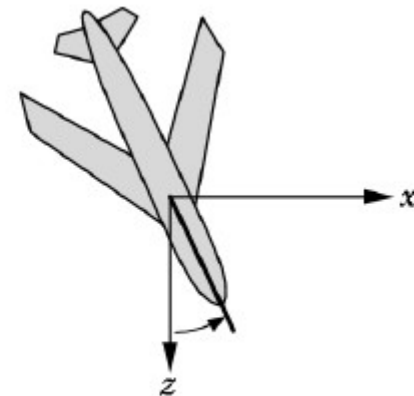
- Una rotazione qualsiasi rispetto ad un asse passante per l'origine può essere decomposta nel prodotto di tre rotazioni rispetto agli assi coordinati; i tre angoli prendono il nome di **angoli di Eulero**
- La rappresentazione con gli angoli di Eulero non è univoca, a terne diverse può corrispondere la stessa trasformazione.
 - Una delle rappresentazioni di Eulero impiega gli angoli roll (rollio), pitch (beccheggio) e yaw (imbardata), di derivazione aeronautica.
 -



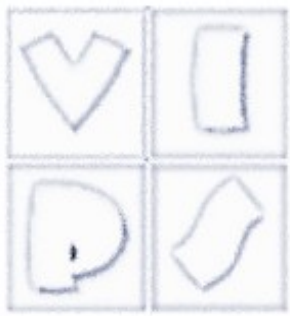
Roll



Pitch

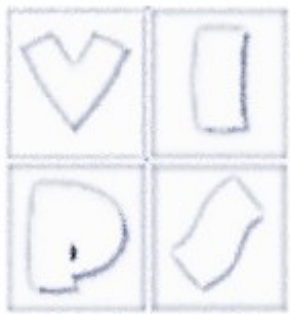


Yaw



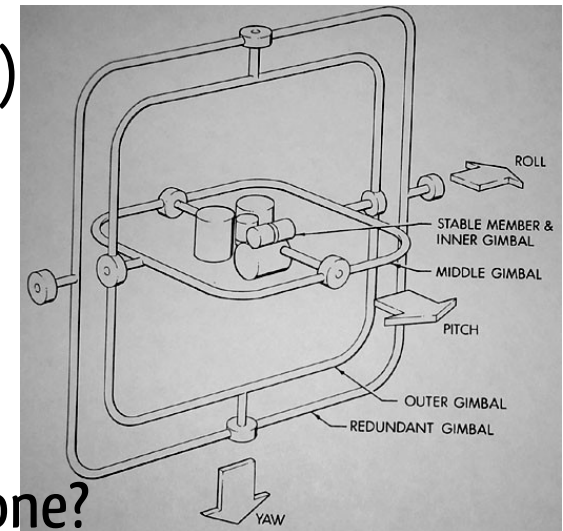
Rotazioni come sequenza di rotazioni XYZ

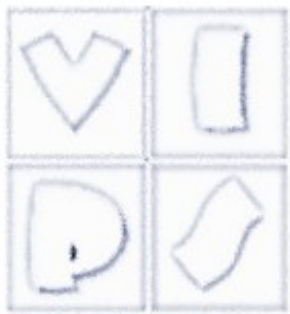
- Si possono usare differenti sequenze di rotazione rispetto a diversi assi
- Con la convenzione degli angoli di Eulero
- E' una rappresentazione comoda quando si mappano su controlli come quello degli aerei
- Ma non è una rappresentazione semplice e naturale di una rotazione generica
- E ci sono alcune controindicazioni....



Problemi con angoli Eulero

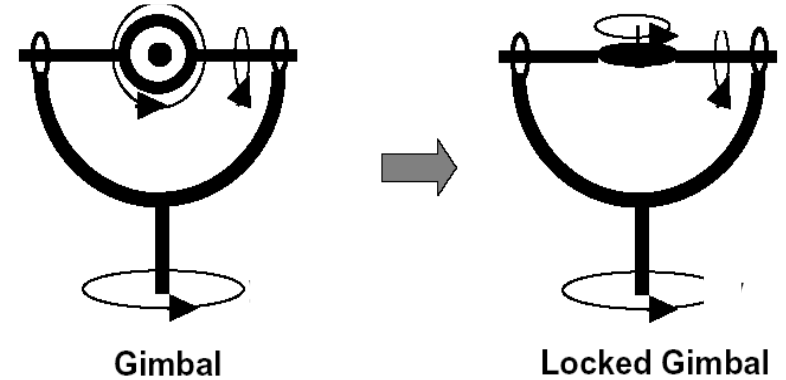
- Ci sono alcuni problemi con le rappresentazioni delle rotazioni
- Angoli di Eulero:
 - Rotazioni non univoche
 - Es: (z, x, y) [roll, yaw, pitch] = $(90, 45, 45) = (45, 0, -45)$
mandano entrambi l'asse x in direzione $(1, 1, 1)$
 - Gimbal Lock (blocco del giroscopio)
 - Gimbal: dispositivo meccanico usato per supportare giroscopi o bussole
 - Ci sono configurazioni problematiche
 - Interpolazione di rotazioni
 - Come calcoliamo il punto medio di una rotazione?



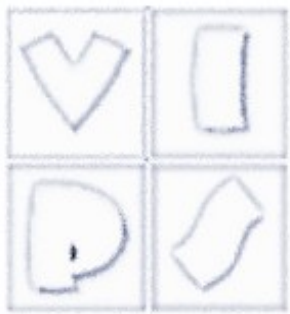


Gimbal lock

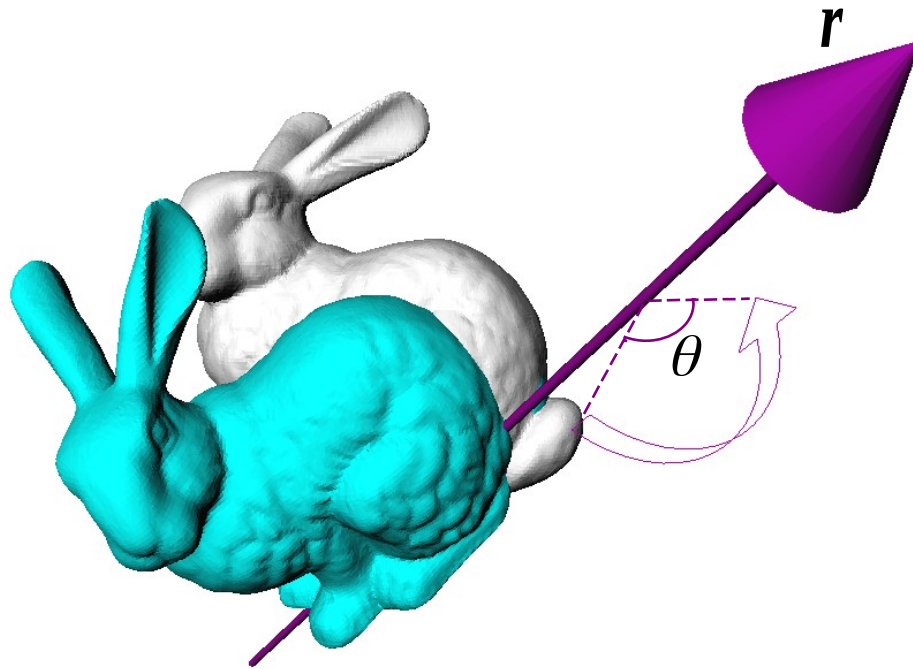
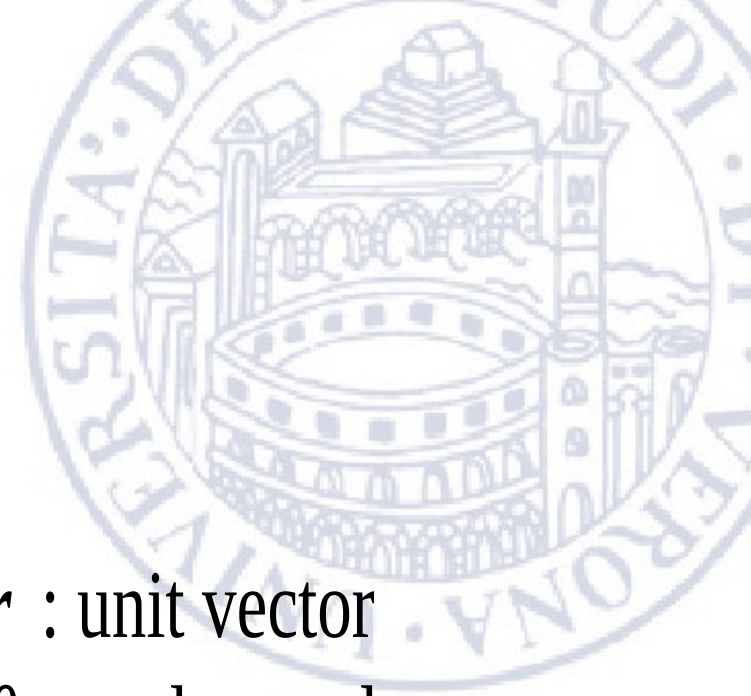
- eseguiamo una rotazione di 90° attorno all'asse y
- Il sistema perde un grado di libertà



$$R_z(\theta_z)R_y(\theta_y)R_x(\theta_x) \approx \begin{bmatrix} 0 & \sin(\theta_x - \theta_z) & \cos(\theta_x - \theta_z) & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x - \theta_z) & -\sin(\theta_x - \theta_z) & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Axis-angle



r : unit vector

θ : scalar angle

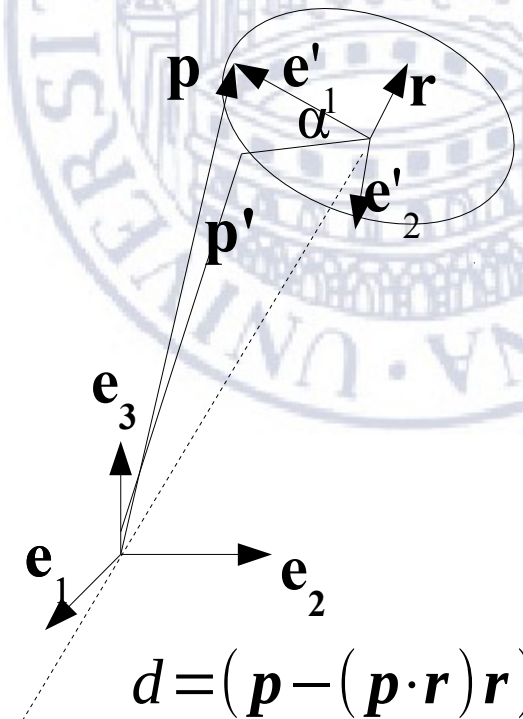
Rotazione asse/angolo

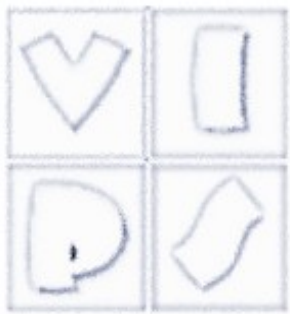
- Consideriamo la rotazione del punto \mathbf{p} attorno all'asse con direzione \mathbf{r}

- Ricordando le slide precedenti, posso descriverla semplicemente nel sistema di riferimento $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{r}$ dove \mathbf{r} è il versore di rotazione \mathbf{e}'_1 l'asse x messo sulla direzione della distanza punto \mathbf{p} asse, \mathbf{e}'_2 dato dal prodotto vettore di \mathbf{r} ed \mathbf{e}'_1 poi applicare la matrice che mappa nel sistema di riferimento base

$$\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_{11} & \mathbf{e}'_{21} & r_1 & O'_1 \\ \mathbf{e}'_{12} & \mathbf{e}'_{22} & r_2 & O'_2 \\ \mathbf{e}'_{13} & \mathbf{e}'_{23} & r_3 & O'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \cos \alpha \\ d \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \cos \alpha (\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}) + \sin \alpha \mathbf{r} \times (\mathbf{p} - \mathbf{O}') + \mathbf{O}'$$

$$\mathbf{p}' = \cos \alpha \mathbf{p} + (1 - \cos \alpha) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} + \sin \alpha (\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$



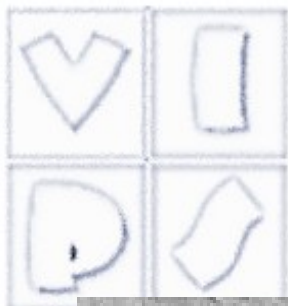


Rotazione asse angolo

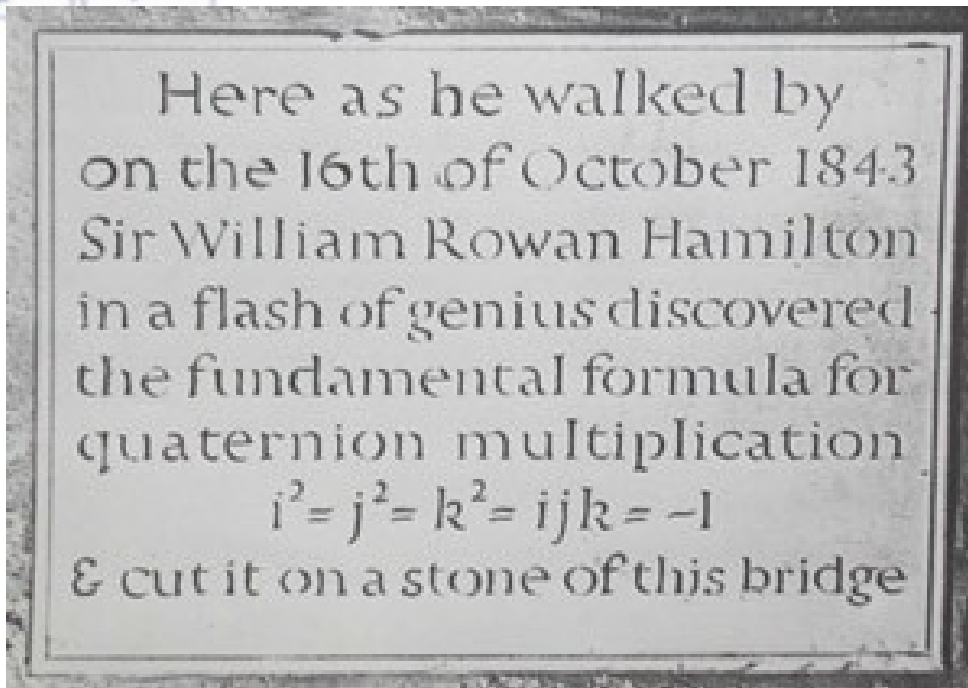
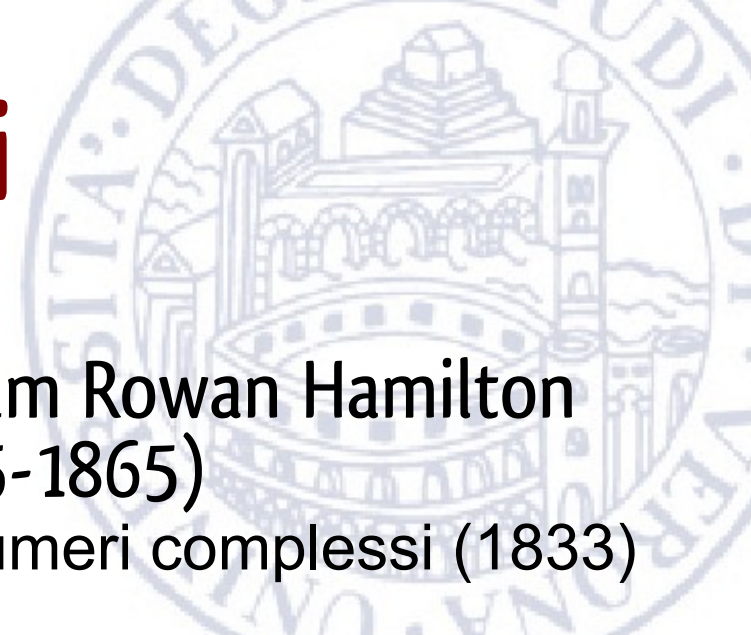
- La rotazione generica asse angolo con asse r si può anche rappresentare con la seguente matrice, dove $c = \cos(\alpha)$ e $s = \sin(\alpha)$:

$$R(\alpha, \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} (1-c)r_1^2+c & (1-c)r_1r_2-sr_3 & (1-c)r_1r_2+sr_2 & 0 \\ (1-c)r_1r_2+sr_3 & (1-c)r_2^2+c & (1-c)r_2r_2-sr_1 & 0 \\ (1-c)r_1r_3-sr_2 & (1-c)r_2r_3+sr_1 & (1-c)r_3^2+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Aggiungendo le traslazioni dall'origine al punto e indietro si possono scrivere generiche rotazioni



Quaternioni



- William Rowan Hamilton (1805-1865)
 - Numeri complessi (1833)

$$x + iy \quad \text{where} \quad i^2 = -1$$

- Quaternioni (1843)

$$w + ix + jy + kz \quad \text{where}$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$

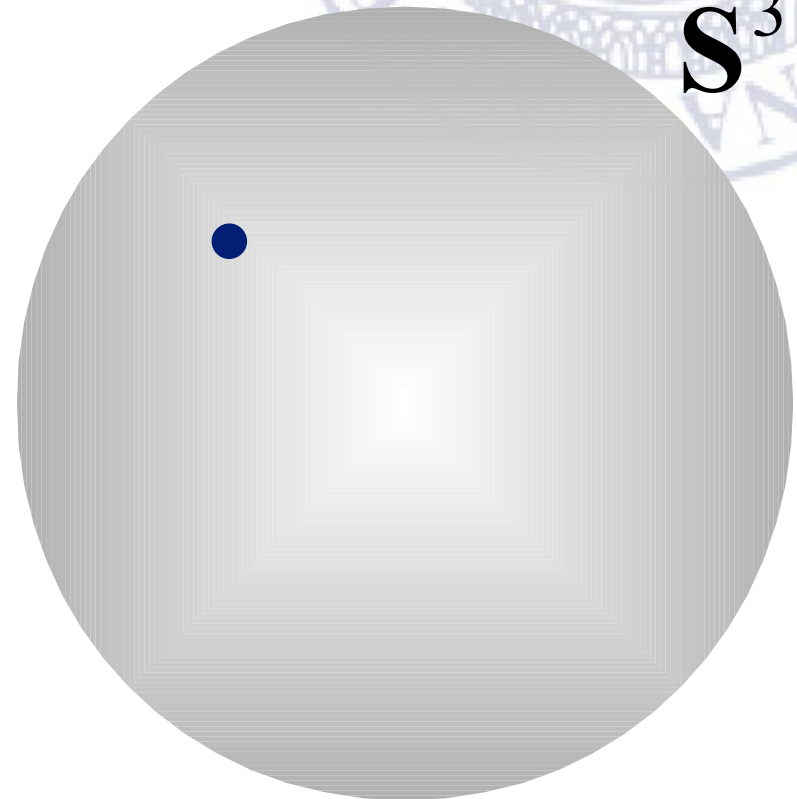
Quaternioni unitari e rotazioni

- I quaternioni unitari (normalizzati) rappresentano le rotazioni

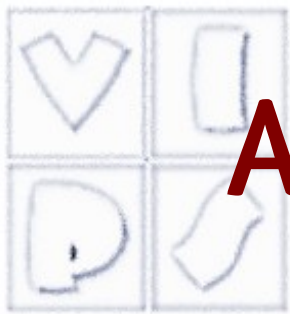
$$\mathbf{q} = w + ix + jy + kz$$

$$= (w, x, y, z)$$

$$= (w, \mathbf{v})$$



$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



Algebra dei quaternioni unitari

- Identità

$$q = (1, 0, 0, 0)$$

- Moltiplicazione

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 &= (w_1, \mathbf{v}_1)(w_2, \mathbf{v}_2) \\ &= (w_1 w_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, w_1 \mathbf{v}_2 + w_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

- Inverso

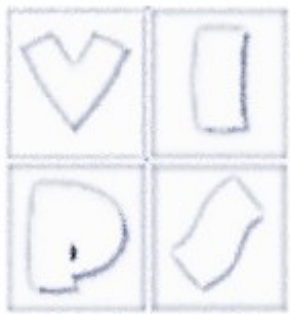
$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{-1} &= (w, -x, -y, -z) / (w^2 + x^2 + y^2 + z^2) \\ &= (-w, x, y, z) / (w^2 + x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

- Rotazione con asse in direzione opposta o angolo negativo

$$\mathbf{q} \mathbf{q}^{-1} = (1, 0, 0, 0)$$

- Lo spazio dei quaternioni unitari è

- Chiuso rispetto a moltiplicazione e inversione
- Non per addizione e sottrazione



Esercizi/esempi

- Trovare quaternione inverso di $(0,6,8,0)$
- Trovare q , che descrive una rotazione di 60 gradi intorno a $v = (3,4,0)$
- Devo avere un quaternione unitario

$$\cos(60/2) = \cos(30) = 1/2$$

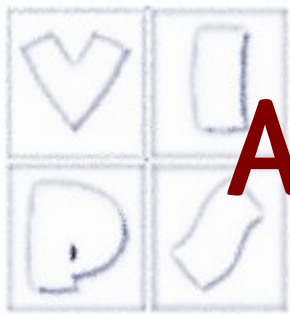
$$\sin(60/2) = \sin(30) = \sqrt{3}/2$$

$$v' = v/\|v\| = [3,4,0]/5 = [3/5,4/5,0]$$

$$q = [1/2, \sqrt{3}/2 * [3/5,4/5, 0]]$$
$$= [1/2, 3\sqrt{3}/10, 4\sqrt{3}/10, 0]$$

$$\|q\| = 1/4 + 27/100 + 48/100$$
$$= (25+27+48)/100 = 1$$





Algebra dei quaternioni unitari

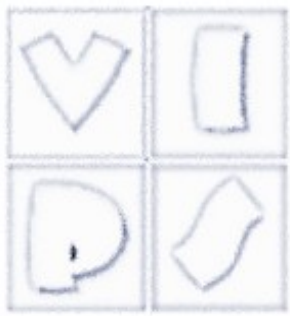
- Antipodal equivalence
 - q and $-q$ represent the same rotation

$$R_q(p) = R_{-q}(p)$$

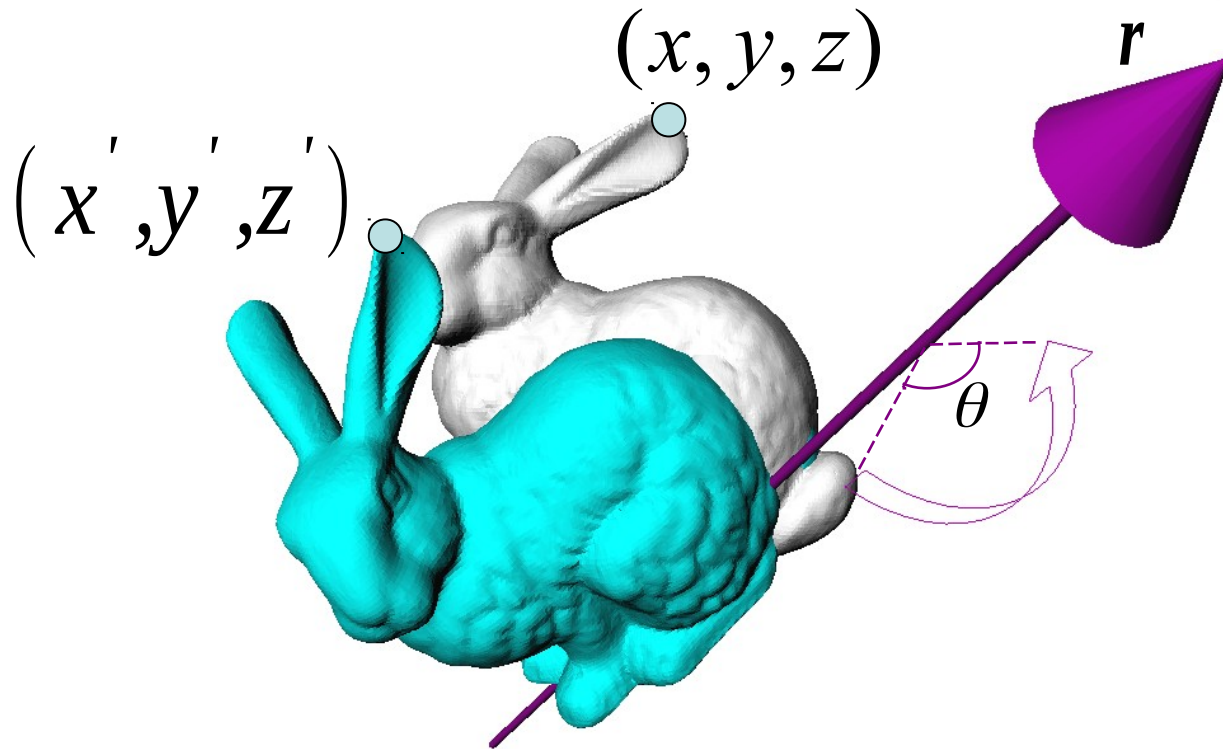
- ex) rotation by $\pi-\theta$ about opposite direction
- 2-to-1 mapping between S^3 and $SO(3)$
- Twice as fast as in $SO(3)$



Quaternioni e rotazioni



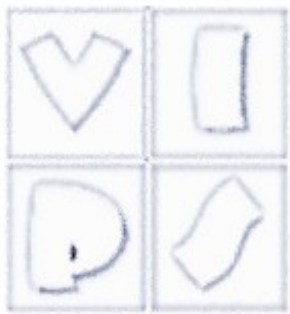
- Rotazione attorno a r dell'angolo θ



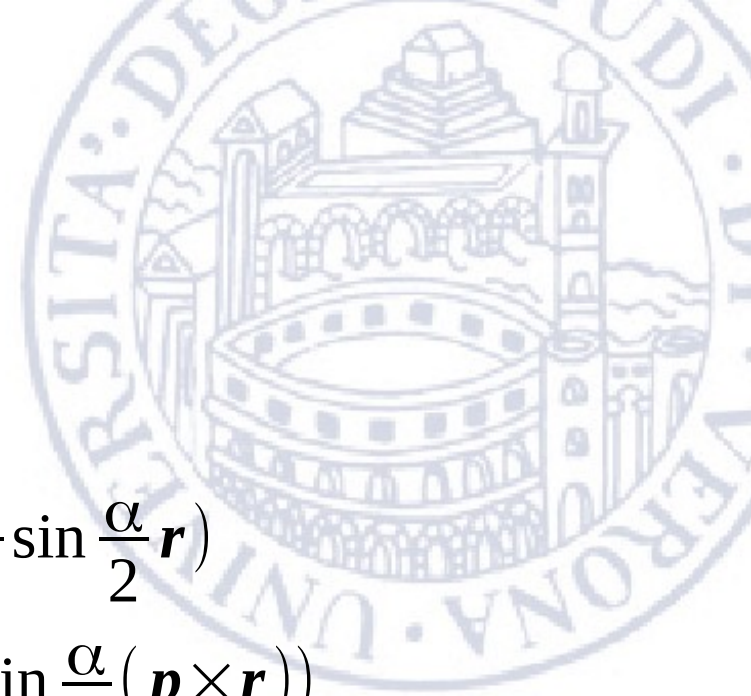
$$q = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \mathbf{r} \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$p' = qpq^{-1} \quad \text{dove} \quad \mathbf{p} = (0, x, y, z)$$

**Quaternione puramente
immaginario**



Infatti



- Data la definizione

$$q \mathbf{p} q^{-1} = (\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{r})(0, \mathbf{p})(\cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{r})$$

$$(\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{r})(\sin \frac{\alpha}{2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}), \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{p} - \sin \frac{\alpha}{2} (\mathbf{p} \times \mathbf{r}))$$

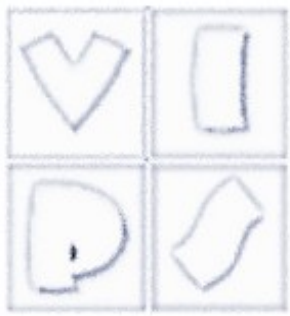
$$(0, (\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}) \mathbf{r} + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \mathbf{r} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (\mathbf{p} \times \mathbf{r}))$$

- E ricordando le relazioni trigonometriche

$$(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}) = \cos \alpha \quad 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = (1 - \cos \alpha) \quad 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha$$

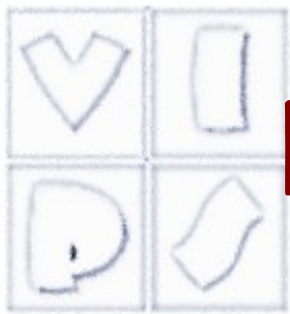
- Otteniamo la stessa formula ottenuta con l'analisi geometrica

$$\mathbf{p}' = \cos \alpha \mathbf{p} + (1 - \cos \alpha) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} + \sin \alpha (\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$



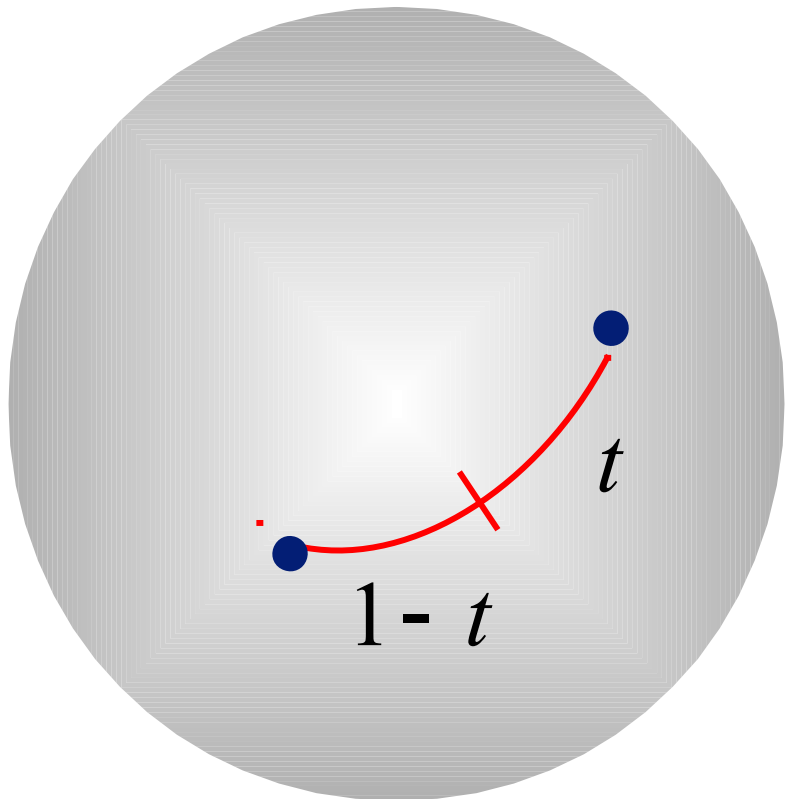
Confronto

- Una rotazione sotto forma di quaternioni può essere convertita in matrice di rotazione generica
- Quaternions take less space (4 numbers vs. 9 for matrices)
- Rotating a vector requires 28 multiplications using quaternions vs. 9 for matrices
- Composing two rotations using quaternions q_1q_2 requires 16 multiples vs. 27 for matrices
- Quaternions are typically not hardware accelerated whereas matrices are



Interpolazione lineare sferica

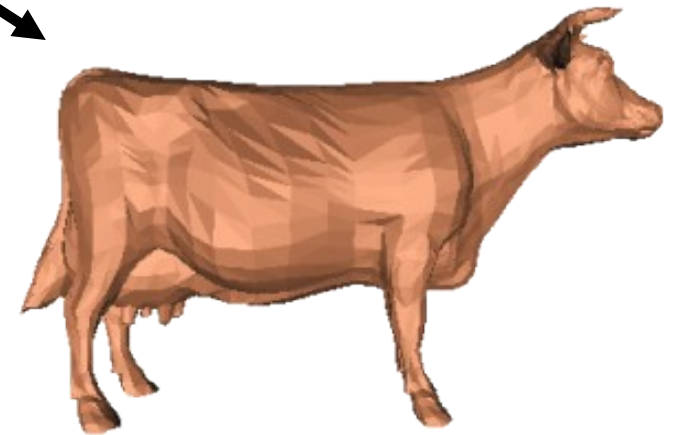
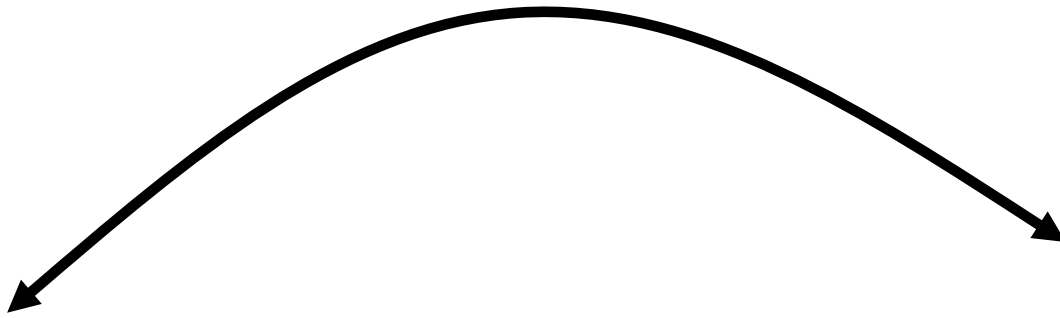
- SLERP [Shoemake 1985] Interpolazione lineare di due orientazioni parametrizzata da t tra 0 e 1
- Rotazione con t velocità costante



$$\begin{aligned}\text{slerp}_t(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &= \mathbf{q}_1 (\mathbf{q}_1^{-1} \mathbf{q}_2)^t \\ &= \mathbf{q}_1 \exp(t \cdot \log(\mathbf{q}_1^{-1} \mathbf{q}_2))\end{aligned}$$

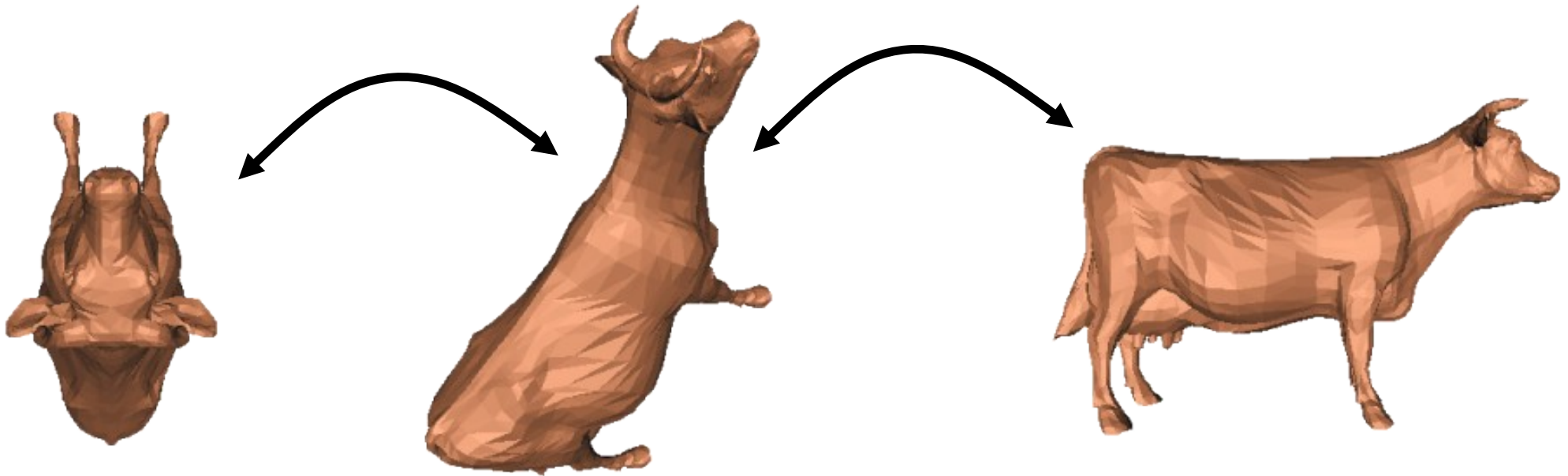
Quaternions and Interpolation

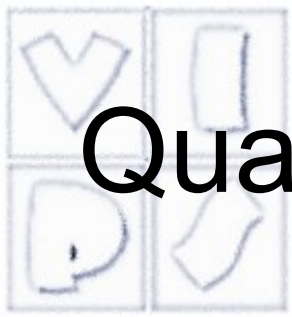
- Given two orientations q_1 and q_2 , find the orientation halfway between



Quaternions and Interpolation

- Given two orientations q_1 and q_2 , find the orientation halfway between





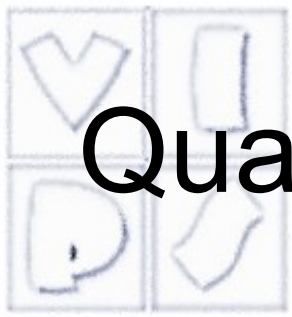
Quaternions and Interpolation



Quaternion Interpolation

Euler Angle Interpolation





Quaternions and Interpolation



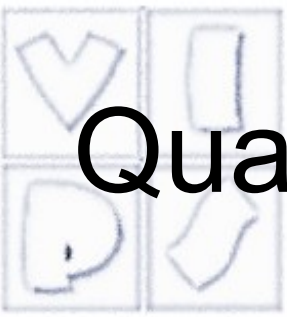
Quaternion Interpolation



Euler Angle Interpolation



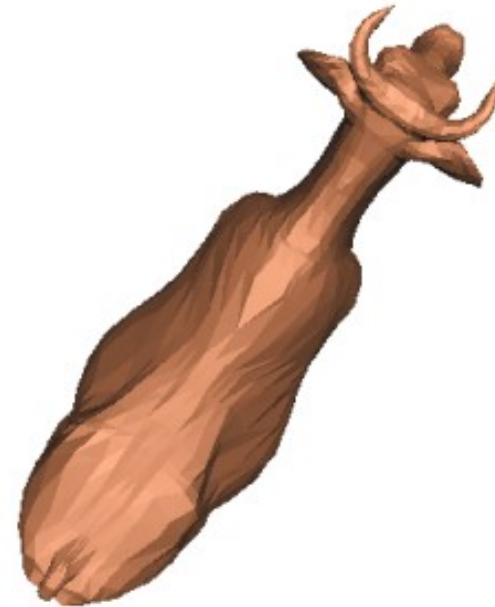
Quaternions and Interpolation

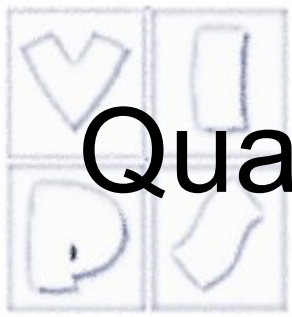


Quaternion Interpolation



Euler Angle Interpolation





Quaternions and Interpolation

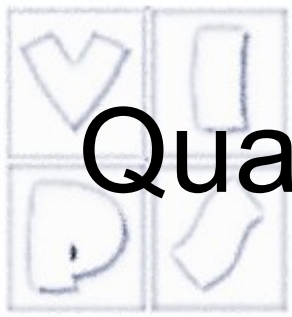


Quaternion Interpolation



Euler Angle Interpolation



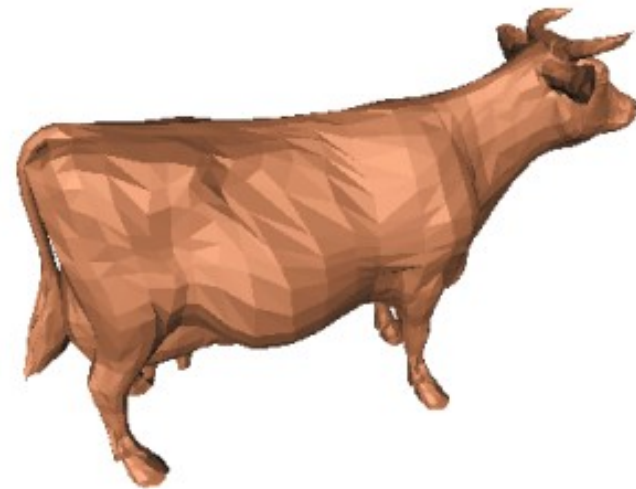
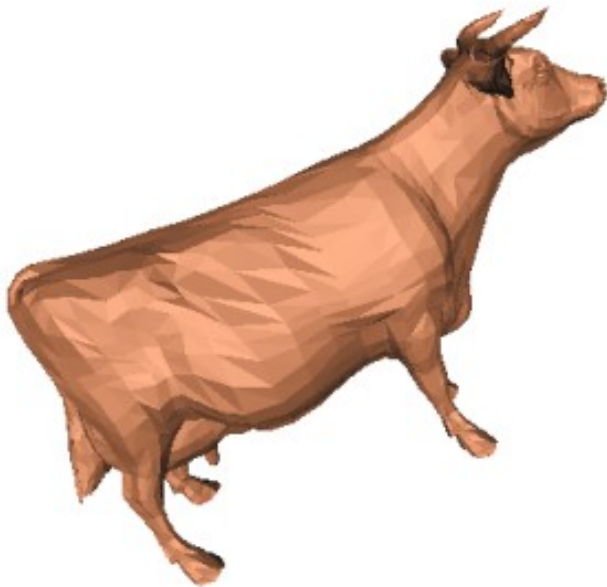


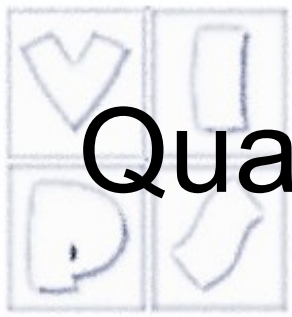
Quaternions and Interpolation



Quaternion Interpolation

Euler Angle Interpolation



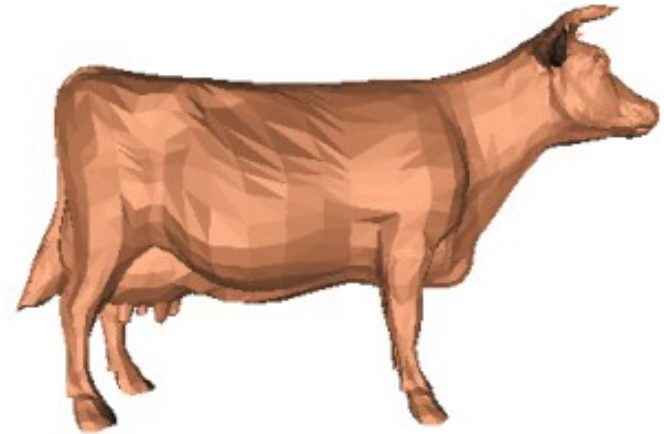
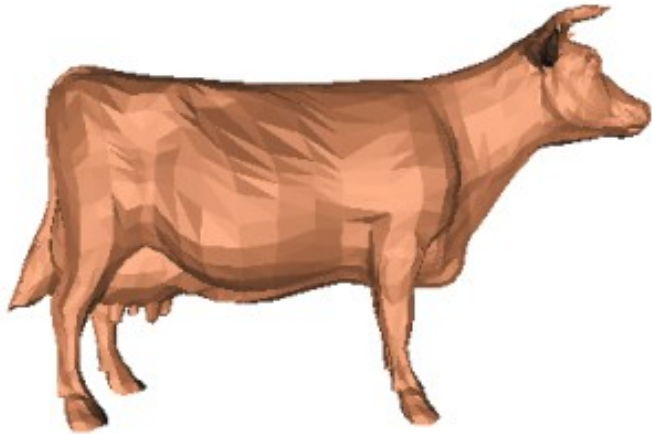


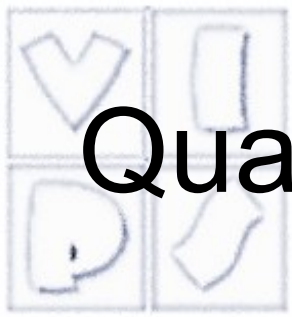
Quaternions and Interpolation



Quaternion Interpolation

Euler Angle Interpolation





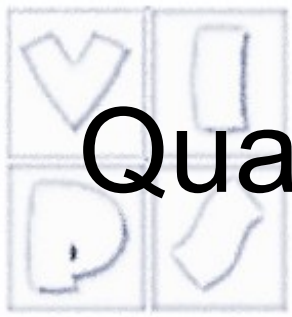
Quaternions and Interpolation



Quaternion Interpolation

Euler Angle Interpolation





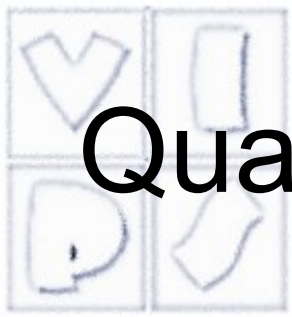
Quaternions and Interpolation



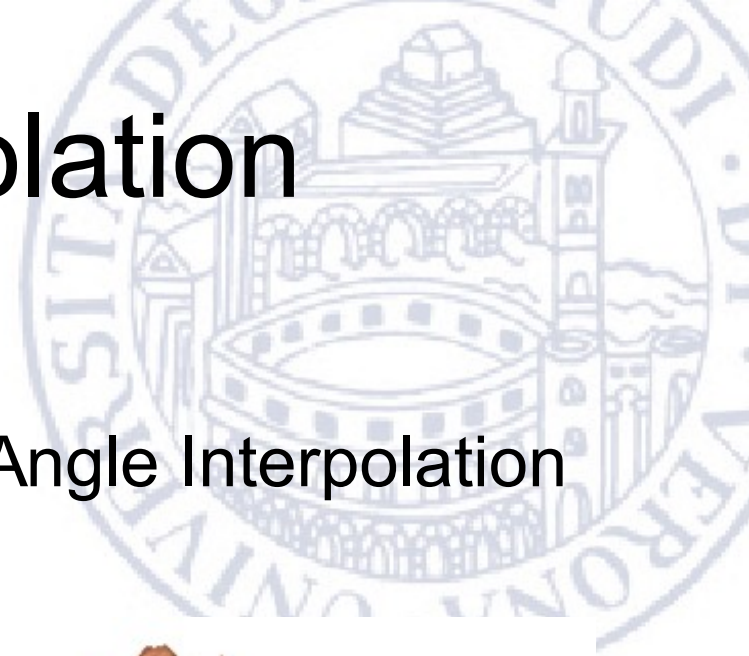
Quaternion Interpolation

Euler Angle Interpolation





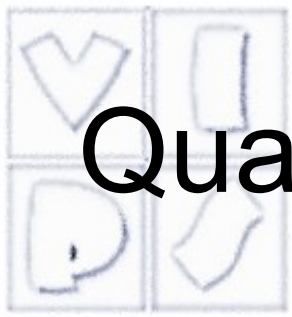
Quaternions and Interpolation



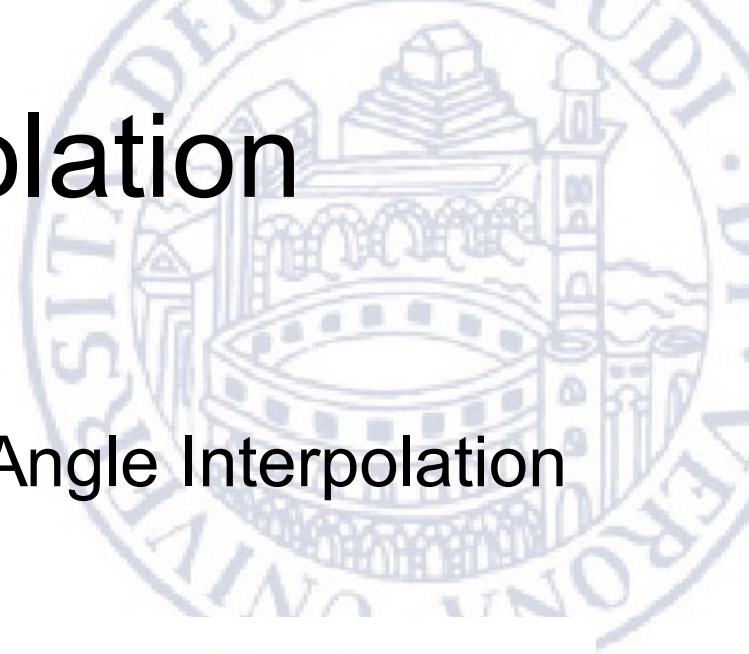
Quaternion Interpolation

Euler Angle Interpolation



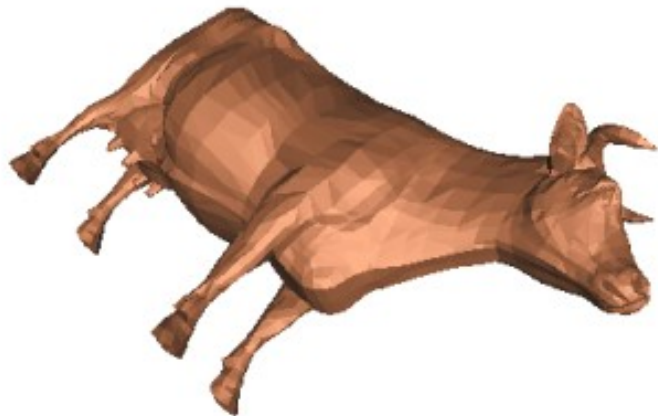


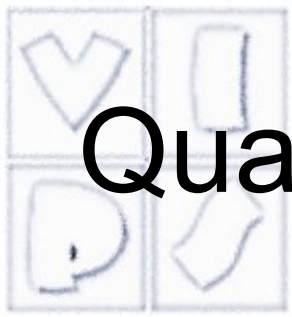
Quaternions and Interpolation



Quaternion Interpolation

Euler Angle Interpolation



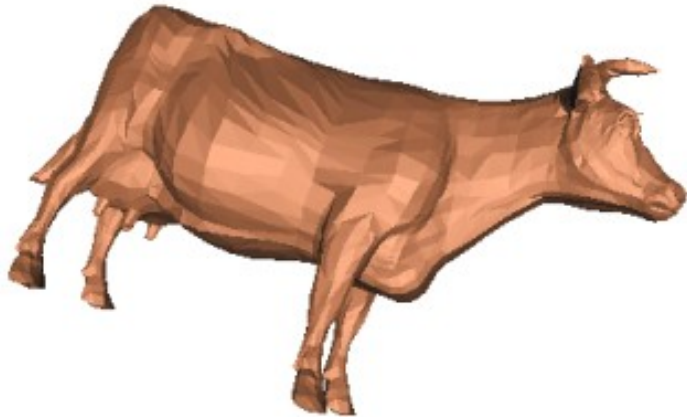


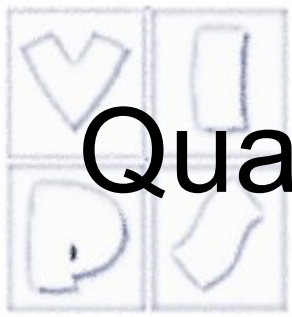
Quaternions and Interpolation



Quaternion Interpolation

Euler Angle Interpolation



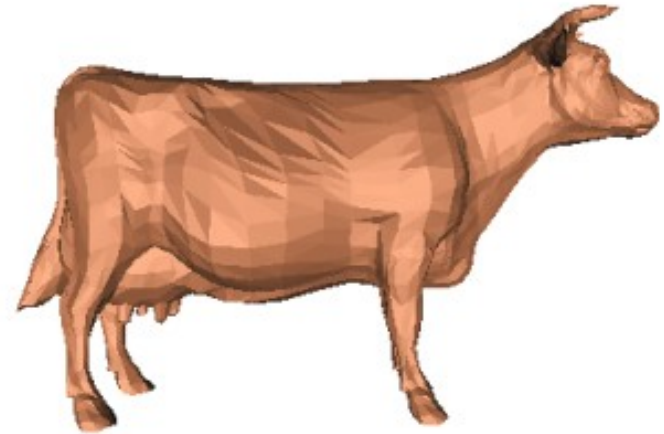
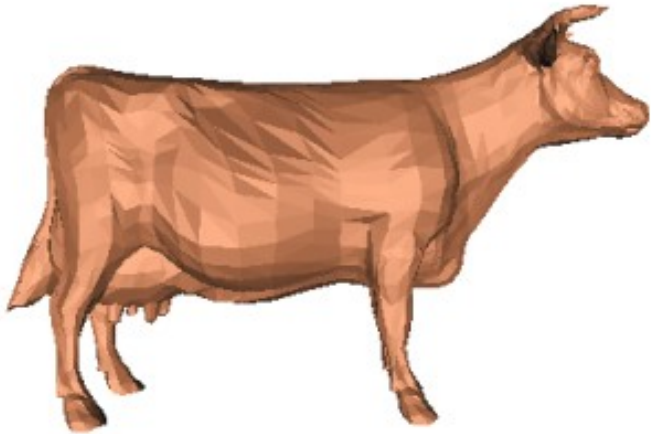


Quaternions and Interpolation



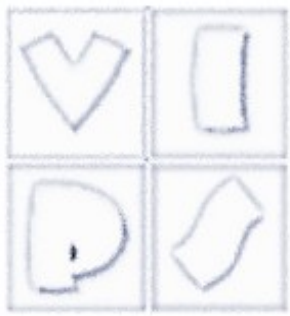
Quaternion Interpolation

Euler Angle Interpolation



Generic Rotation Matrix vs. Unit Quaternion

- Equivalent in many aspects
 - Redundant, No singularity
 - Exp & Log, Special tangent space
- Why quaternions ?
 - Fewer parameters, Simpler algebra
 - Easy to fix numerical error
 - Cf) matrix orthogonalization (Gram-Schmidt process, QR, SVD decomposition)
- Why rotation matrices ?
 - One-to-one correspondence
 - Handle rotation and translation in a uniform way
 - Eg) 4x4 homogeneous matrices



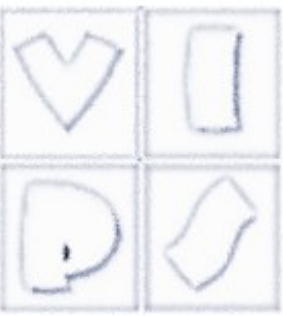
Conversione

In theory, conversion between any representations is always possible

In practice, conversion is not straightforward because of difference in convention

Quaternion to Matrix

$$R = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 & 2q_x q_y - 2q_0 q_z & 2q_x q_z + 2q_0 q_y & 0 \\ 2q_x q_y + 2q_0 q_z & q_0^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 & 2q_y q_z - 2q_0 q_x & 0 \\ 2q_x q_z - 2q_0 q_y & 2q_y q_z + 2q_0 q_x & q_0^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



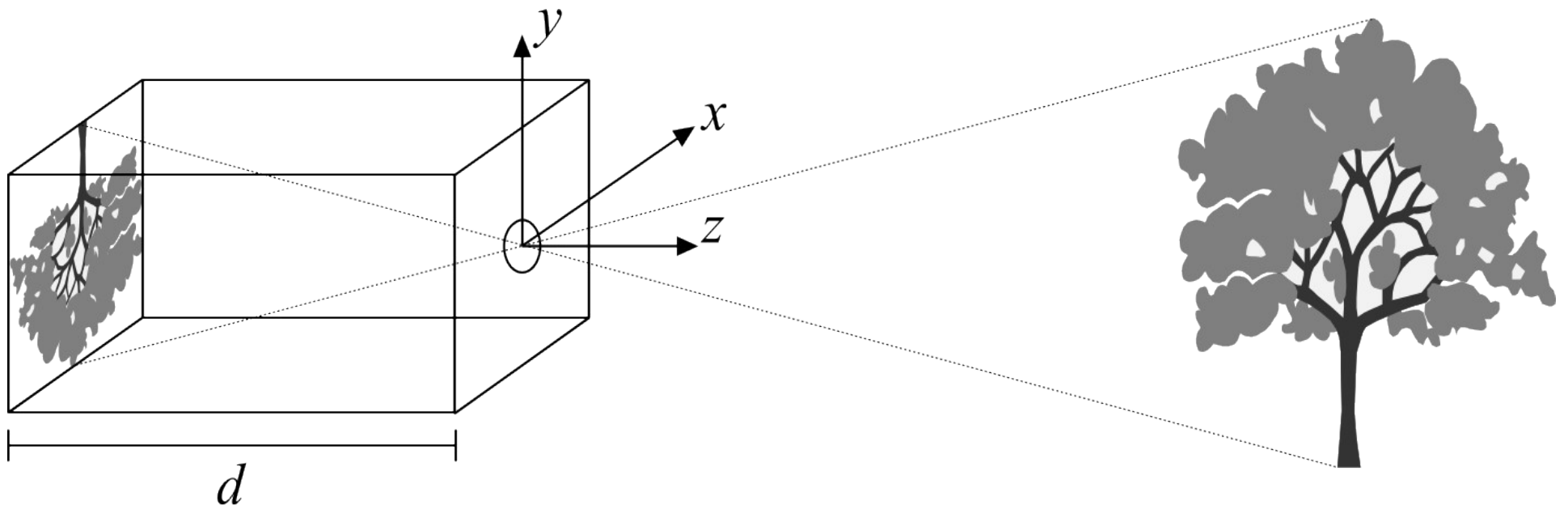
Matrici e proiezioni

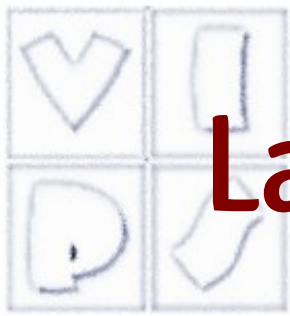
- Abbiamo il nostro mondo dove creare la scena inserendo i modelli: spazio Euclideo
- Sappiamo trasformare i punti dello spazio traslando, ruotando e scalando
- Per simulare la formazione delle immagini ci serve un ultimo strumento geometrico: la modellazione della proiezione degli oggetti sul piano immagine
- Questo si fa con la proiezione prospettica o, in casi semplificati, con la proiezione ortografica o parallela
- Anche queste si possono modellare con matrici, solo che dovranno trasformare uno spazio 3D in uno 2D (espressi in coordinate omogenee). Quindi sono matrici



La macchina fotografica virtuale

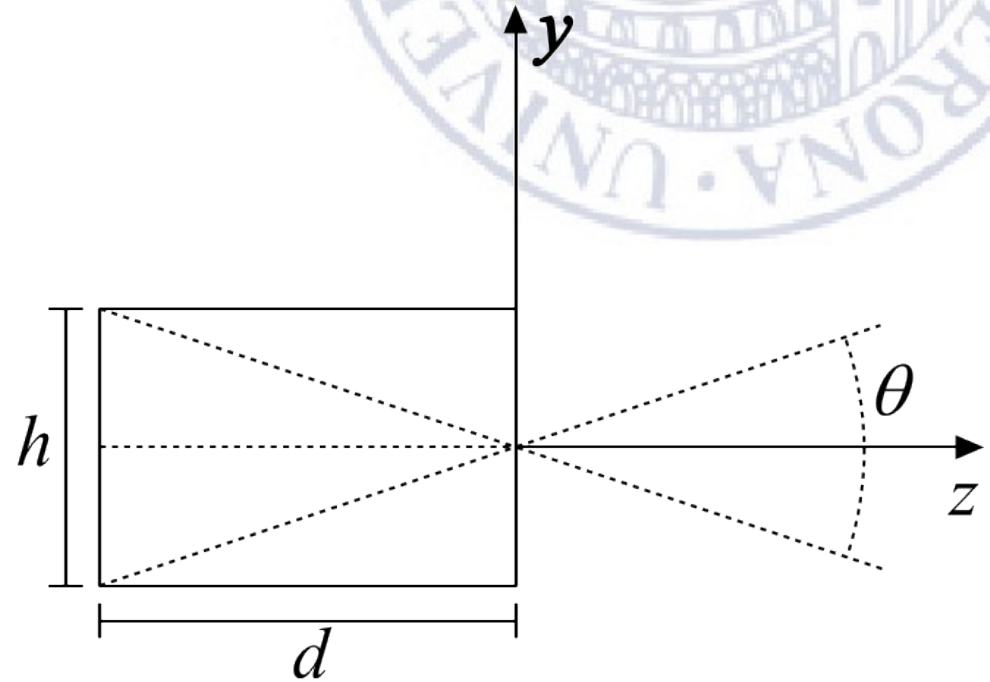
- La metafora utilizzata per descrivere le relazioni scena/osservatore è quella della macchina fotografica virtuale (synthetic camera).
- Il modello semplice usato anche in Computer Vision è la telecamera pinhole

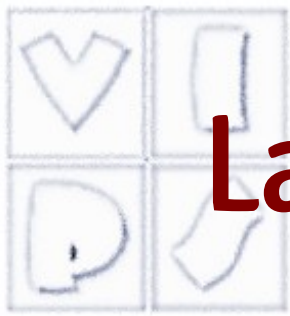




La macchina fotografica virtuale

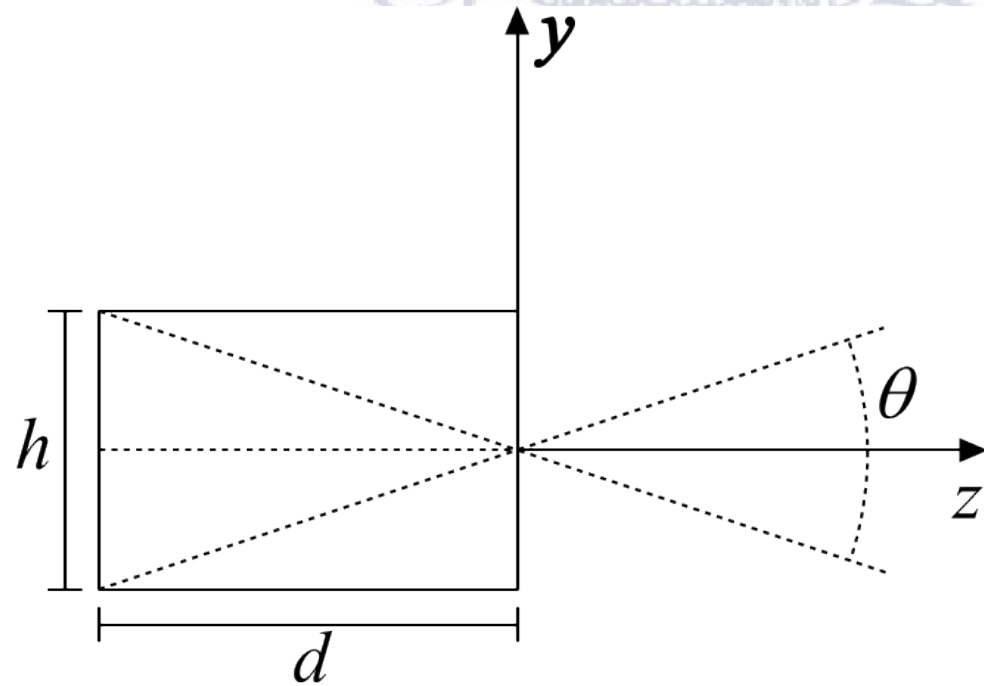
- La macchina fotografica virtuale è costituita da un parallelepipedo in cui la faccia anteriore presenta un foro di dimensioni infinitesime (pinhole camera) e sulla faccia posteriore si formano le immagini





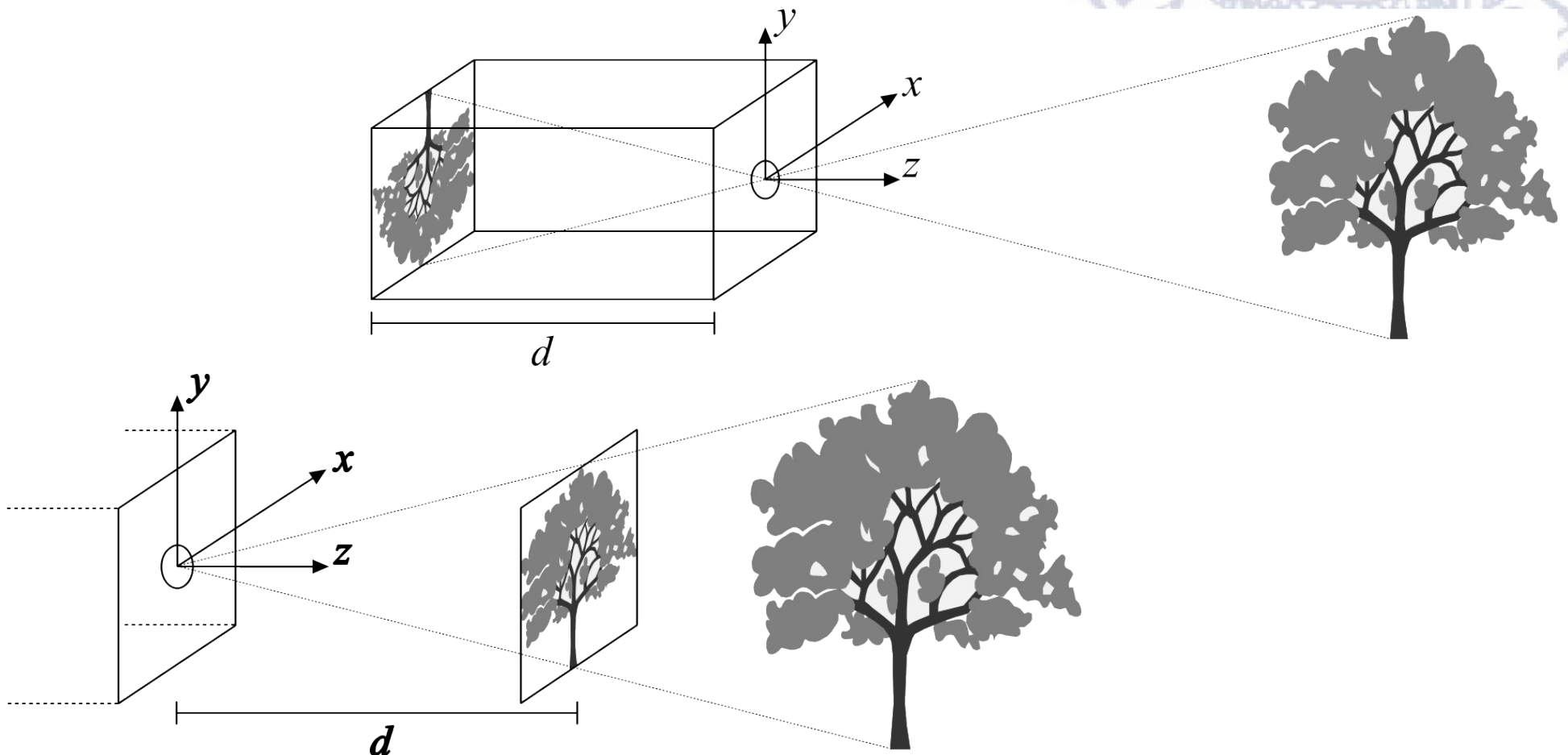
La macchina fotografica virtuale

- Immagini nitide, nessun problema di luminosità, l'angolo di vista può essere modificato variando il rapporto tra la distanza focale (d) e la dimensione del piano immagine



La macchina fotografica virtuale

- Per convenzione (e maggiore semplicità) si assume l'esistenza di un piano immagine tra la scena ed il centro di proiezione
- Ne risulta il modello matematico della proiezione prospettica

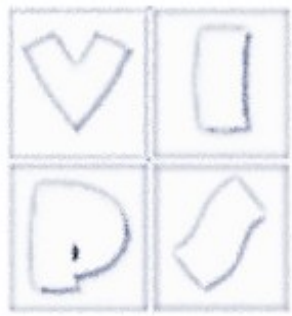


La flagellazione” di Piero della Francesca (1469)



5,6

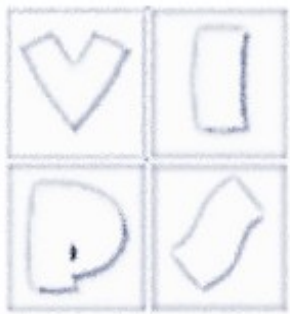
14



Proiezione prospettica

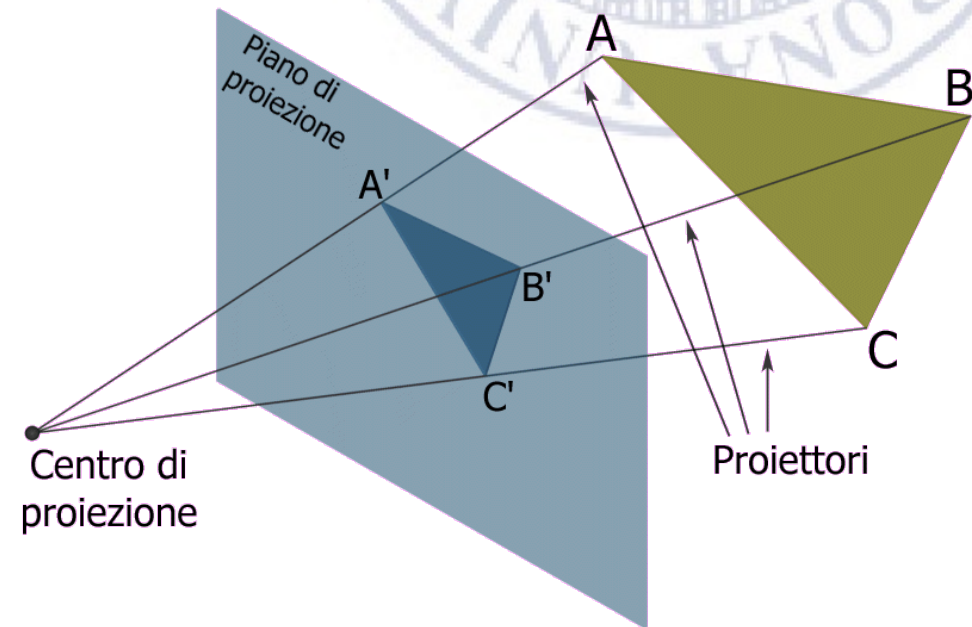
- La relazione che lega i punti 3D ai punti sul piano in questa ipotesi è data dalla proiezione prospettica. Con semplici ragionamenti sui triangoli simili si ha che la proiezione di un punto $P = (P_x, P_y, P_z)$ è data da $P' = (-P_x d/P_z, -P_y d/P_z, 1)$, se mettiamo il piano immagine dietro, $P' = (P_x d/P_z, P_y d/P_z, 1)$, per il piano immagine davanti
- Possiamo scrivere la proiezione in forma matriciale:

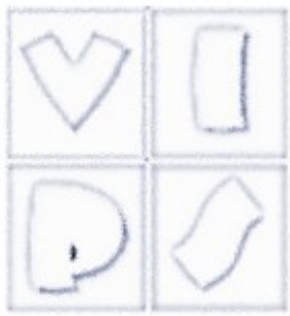
$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix}$$



Trasformazioni di proiezione

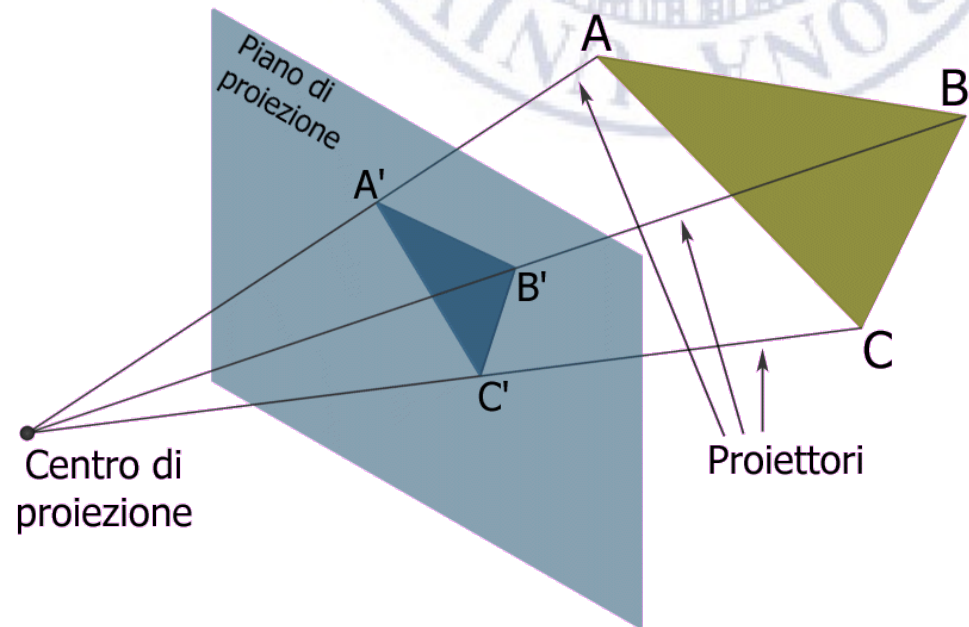
- Da un punto di vista geometrico, la proiezione è definita per mezzo di un insieme di rette di proiezione (i proiettori) aventi origine comune in un centro di proiezione, passanti per tutti i punti dell'oggetto da proiettare ed intersecanti un piano di proiezione

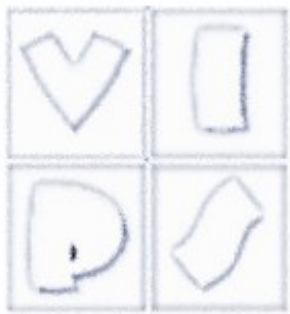




Trasformazioni di proiezione

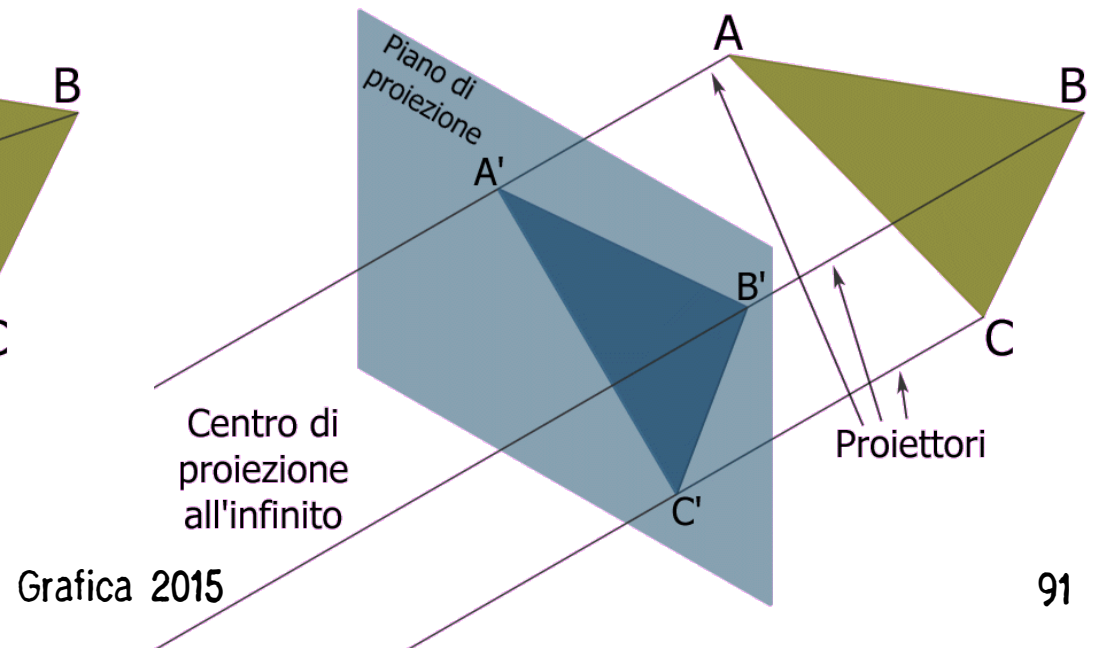
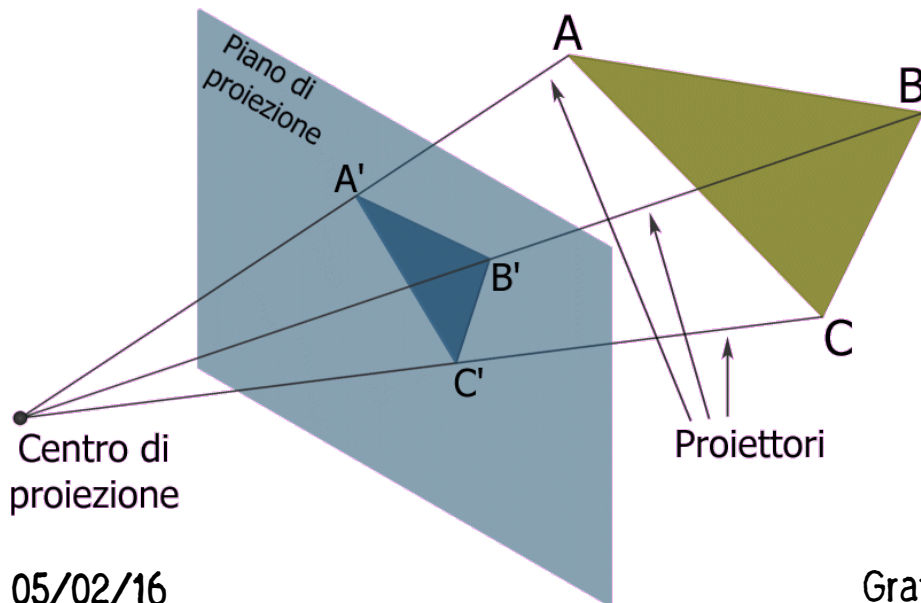
- La proiezione di un segmento è a sua volta un segmento
- Non è quindi necessario calcolare i proiettori di tutti i punti di una scena, ma solo quelli relativi ai vertici delle primitive che la descrivono



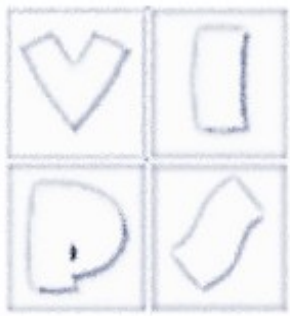


Trasformazioni di proiezione

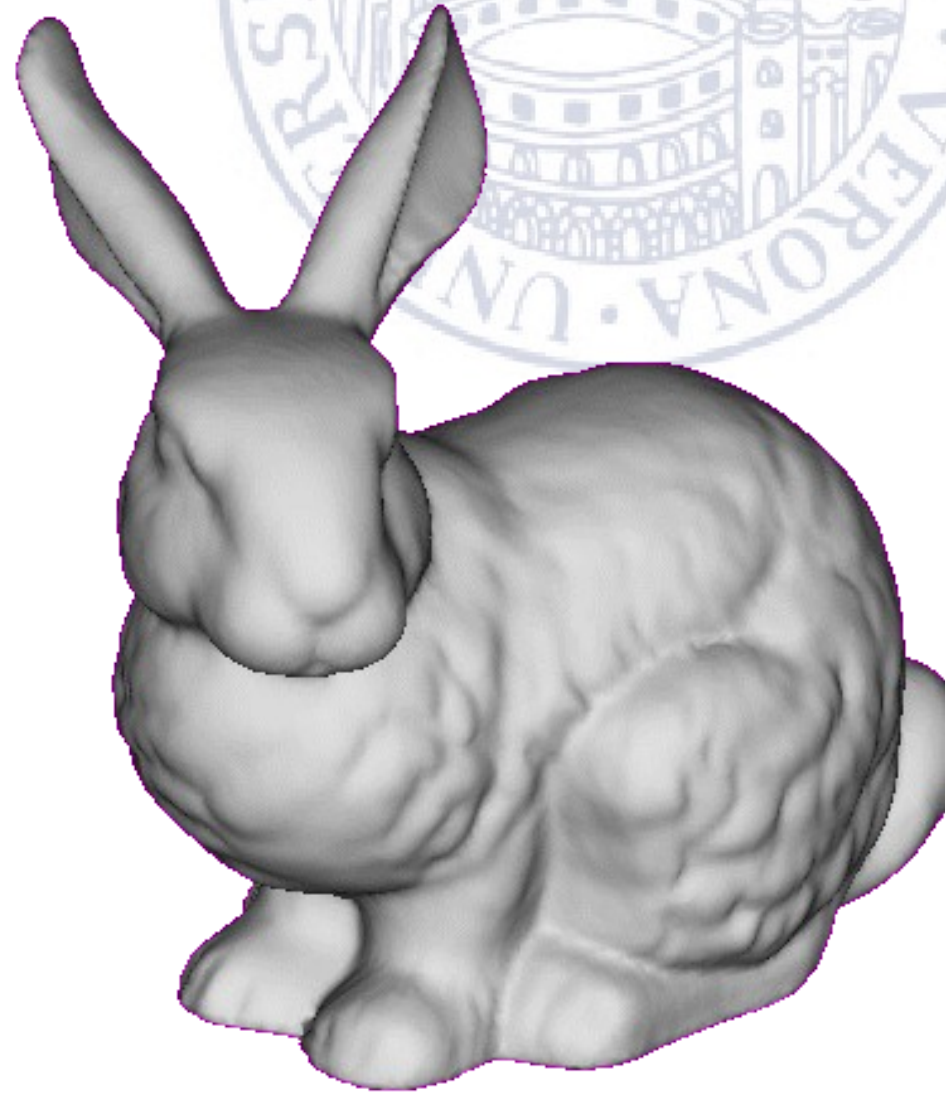
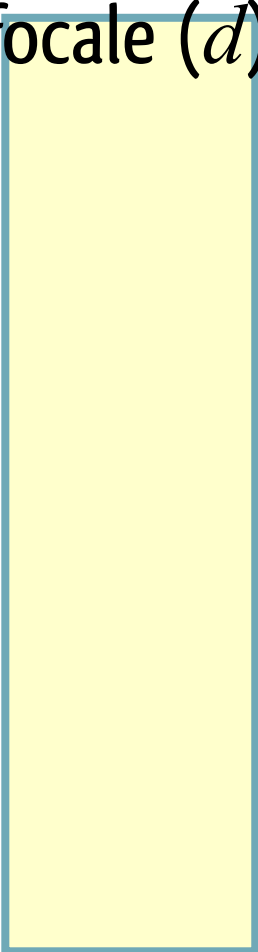
- Le proiezioni geometriche piane si classificano in:
 - Proiezioni **prospettiche** (distanza finita tra il centro ed il piano di proiezione)
 - Proiezioni **parallele** (distanza infinita tra il centro ed il piano di proiezione)



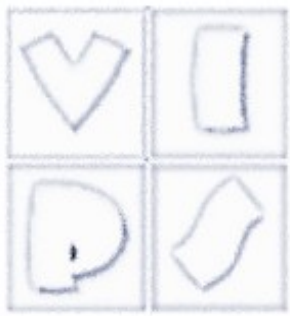
Proiezioni prospettiche



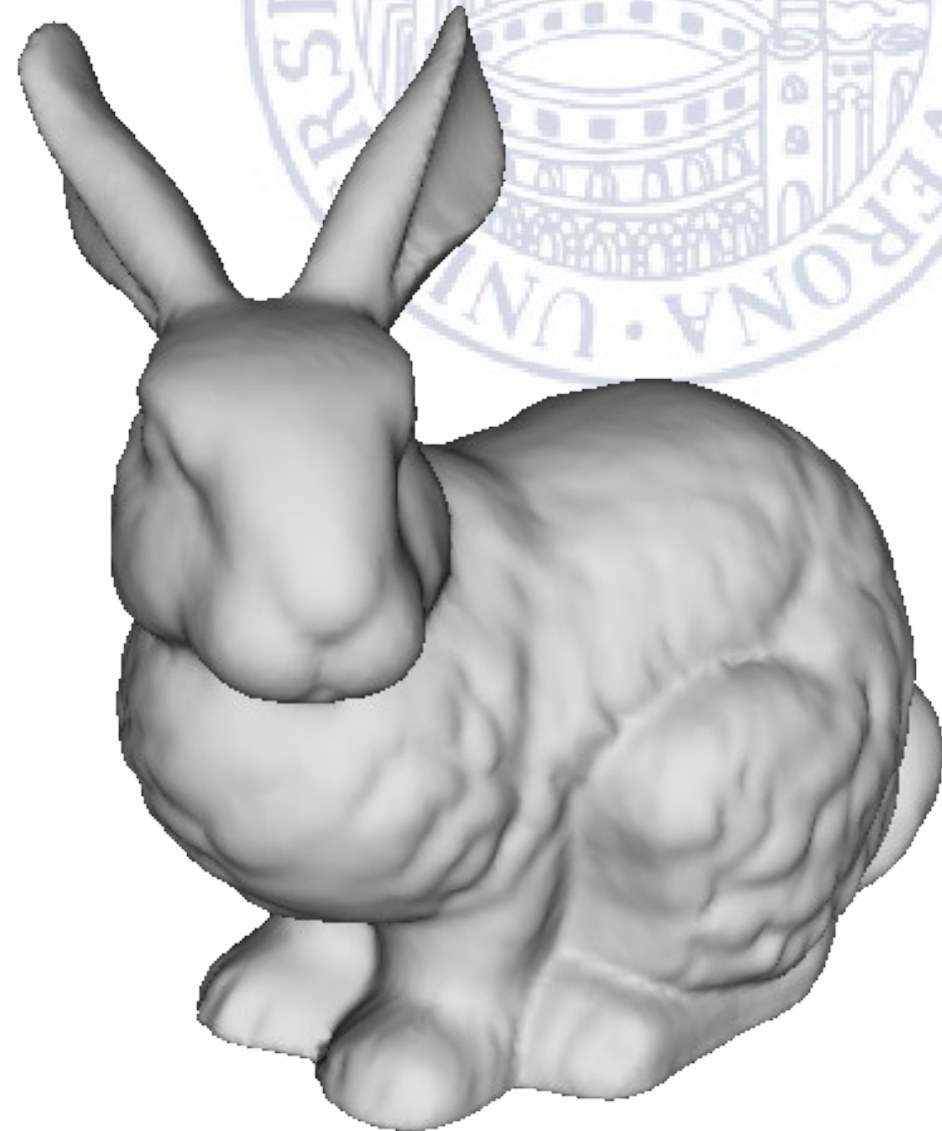
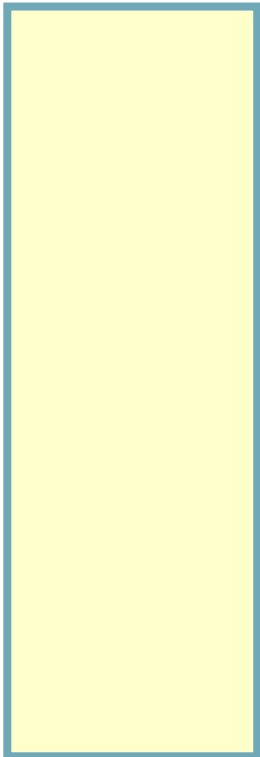
- Al variare della distanza focale (d)



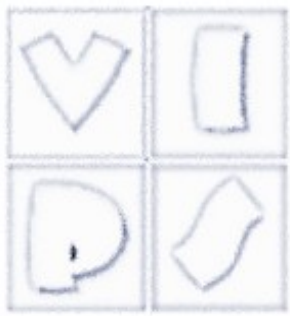
Proiezioni prospettiche



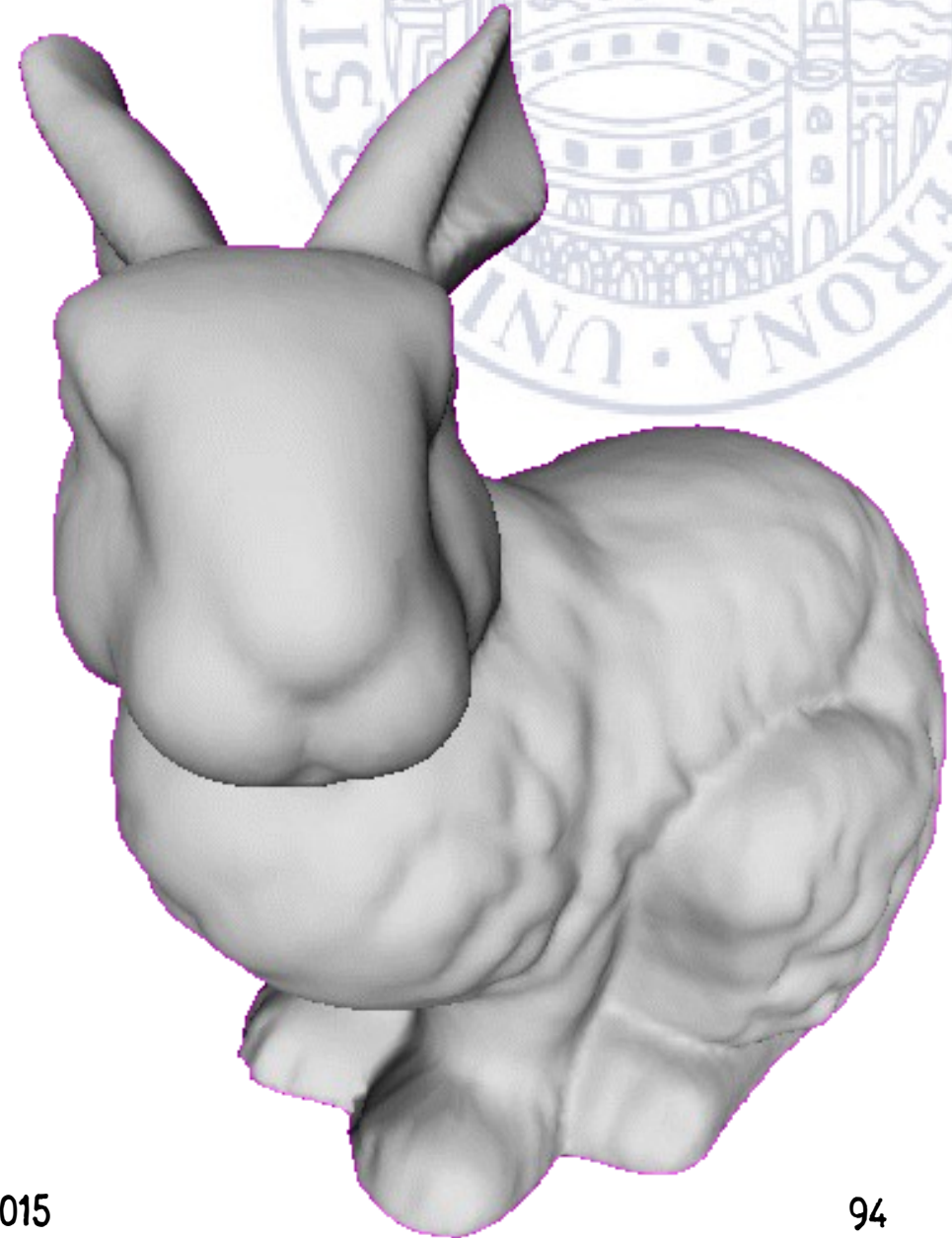
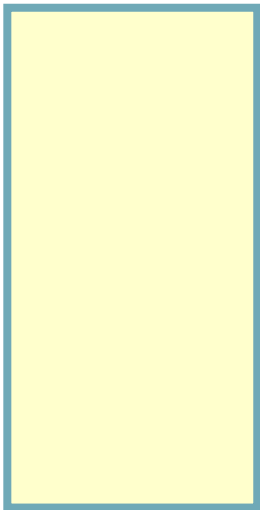
- Al variare della distanza focale (d)



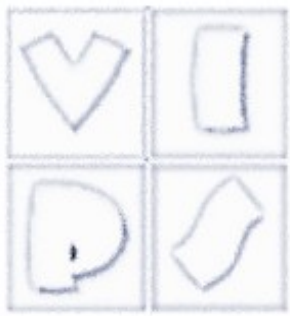
Proiezioni prospettiche



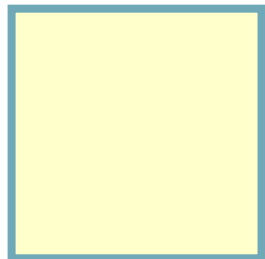
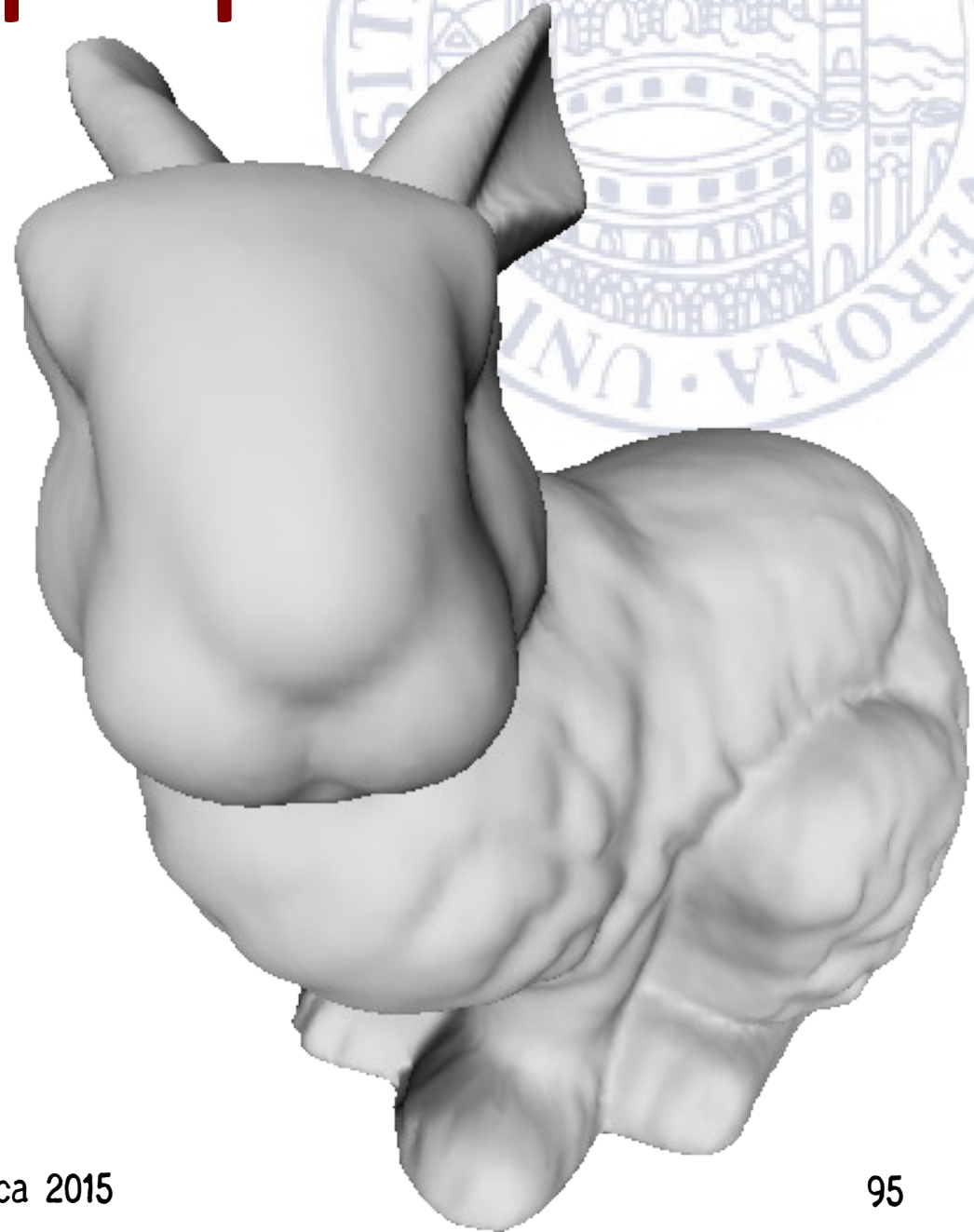
- Al variare della distanza focale (d)



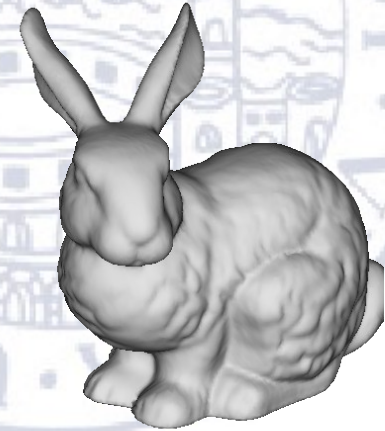
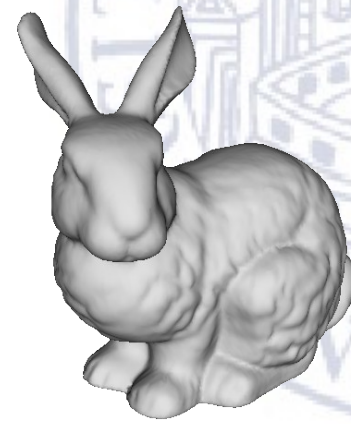
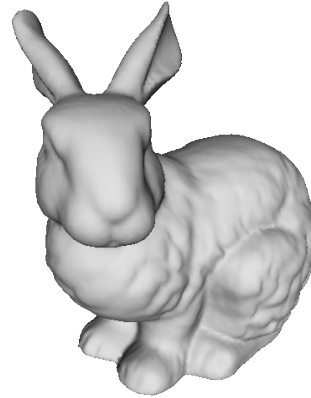
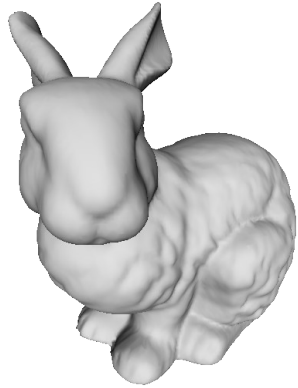
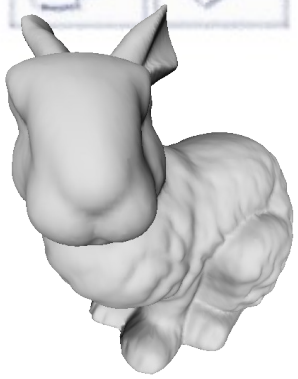
Proiezioni prospettiche



- Al variare della distanza focale (d)



Proiezioni prospettiche



d piccolo

d grande

d infinito
(p. parallela)

Più distorsione
prospettica
Effetto "*fish-eye*"
(grandangolo)

Proporzioni
più mantenute
Effetto "*zoom*"
(es. vista
dal satellite)

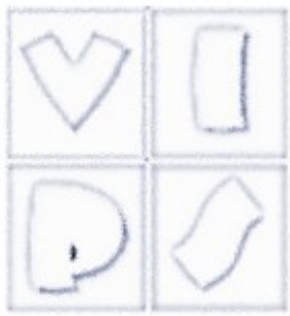


Proiezione parallela

- La proiezione ortogonale (od ortografica) ha una forma matriciale ancora più ovvia

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

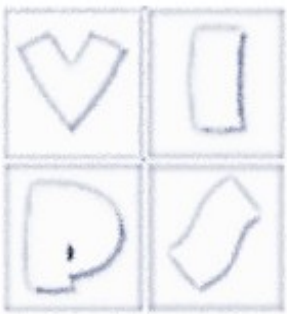
- In sostanza l'effetto della matrice è quello di rimuovere la componente z



Trasformazione prospettica

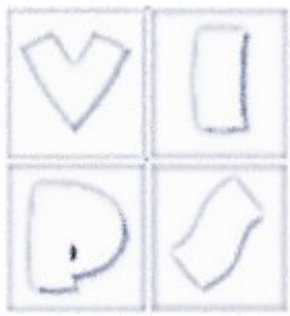
- Per motivi che capiremo, in grafica si usa in realtà rappresentare la proiezione prospettica con una trasformazione che mappa comunque sullo spazio 3D, quindi una matrice 4x4.
- Per passare alla rappresentazione 2D basta poi eliminare la z (che è sempre uguale a d)

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix}$$



Divisione prospettica

- In realtà la coordinata omogenea 2D che ricavo dall'applicazione della matrice è $P' = (P_x, P_y, P_z/d)$
- L'operazione che trasforma in $P' = (P_x d/P_z, P_y d/P_z, 1)$ per avere la forma standard dei punti è la cosiddetta divisione
- Prima della divisione i tre valori possono essere usati per rappresentare l'equivalenza dei diversi punti rispetto alla proiezione.

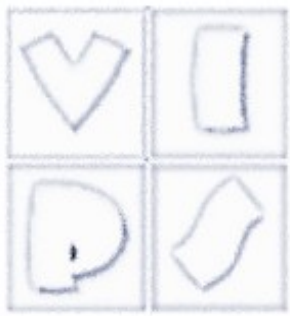


Riferimenti

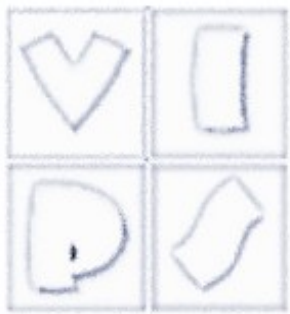
- Ganovelli et al. Cap. 4
- Scateni et al. Cap 4
- Angel (6 ed) cap. 3.1-3.3
- Buss Cap. 2



Domande di verifica



- Che cosa sono le coordinate omogenee?
- Qual è la differenza tra punti e vettori?
- Come si rappresentano orientazione e rotazione?
-
- Qual è la differenza tra proiezione prospettica e trasformazione prospettica?



Esercizi

- Si scriva l'equazione del piano passante per i punti $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$ e della retta ad esso perpendicolare passando per l'origine $(0,0,0)$
- Supponiamo di mettere una telecamera con sistema di riferimento associato (e_1, e_2, e_3, O) centrata nel punto $(5,0,5)$ che guarda verso l'origine. Scrivere la rotazione che porta il sistema di riferimento solidale con la scena nel sistema di riferimento della telecamera, supponendo che l'asse z sia quello che vogliamo coincidente con la retta calcolata